Vedische Mathematik

Schnelles Kopfrechnen

Dieter Kilsch

eh. Technische Hochschule Bingen

23. November 2023

Grundlagen

LITERATUR:

Bharati Krishna Tirtha: *Vedic Mathematics*, 1992

Geschenk von Willi Hahn zur Pensionierung

Grundlagen

LITERATUR:

Bharati Krishna Tirtha: *Vedic Mathematics*, 1992
Geschenk von Willi Hahn zur Pensionierung

Grundlagen

1. Vedische Mathematik: Alte indische Mathematik, viele Formeln zum Vereinfachen des Kopfrechnen.
2. Indische Mathematik kennt Dezimalsystem und damit Stellensystem mit Null.
3. Arabische Ziffern sind eigentlich indische Ziffern.
4. Fibonacci brachte diese im 12. JH von Nordafrika (Arabien) nach Europa.

Grundlagen

Literatur:

Bharati Krishna Tirtha: *Vedic Mathematics*, 1992
Geschenk von Willi Hahn zur Pensionierung

Grundlagen

1. Vedische Mathematik: Alte indische Mathematik, viele Formeln zum Vereinfachen des Kopfrechnen.
2. Indische Mathematik kennt Dezimalsystem und damit Stellensystem mit Null.
3. Arabische Ziffern sind eigentlich indische Ziffern.
4. Fibonacci brachte diese im 12. JH von Nordafrika (Arabien) nach Europa.

Grundlagen

Literatur:

Bharati Krishna Tirtha: *Vedic Mathematics*, 1992
Geschenk von Willi Hahn zur Pensionierung

Grundlagen

1. Vedische Mathematik: Alte indische Mathematik, viele Formeln zum Vereinfachen des Kopfrechnen.
2. Indische Mathematik kennt Dezimalsystem und damit Stellensystem mit Null.
3. Arabische Ziffern sind eigentlich indische Ziffern.
4. Fibonacci brachte diese im 12. JH von Nordafrika (Arabien) nach Europa.

Grundlagen

Literatur:

Bharati Krishna Tirtha: *Vedic Mathematics*, 1992
Geschenk von Willi Hahn zur Pensionierung

Grundlagen

1. Vedische Mathematik: Alte indische Mathematik, viele Formeln zum Vereinfachen des Kopfrechnen.
2. Indische Mathematik kennt Dezimalsystem und damit Stellensystem mit Null.
3. Arabische Ziffern sind eigentlich indische Ziffern.
4. Fibonacci brachte diese im 12. JH von Nordafrika (Arabien) nach Europa.

Normale Notation

Europäische Vorgehensweise $499 \cdot 287 = 143213$:

$$\begin{array}{r}
499 \cdot 287 \\ \hline
998 \\
3992 \\
3493 \\ \hline
143213 \\ \hline\hline
\end{array}$$

Normale Notation

Europäische Vorgehensweise $499 \cdot 287 = 143213$:

$$
\begin{array}{r}
\underline{499 \cdot 287} \\
998 \\
3992 \\
\underline{3493} \\
\underline{\underline{143213}}
\end{array}
$$

Vedische Vorgehensweise $499 \cdot 287 = 143213$:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 4 & 9 & 9 \\
 & & & 2 & 8 & 7 \\
\hline
 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 8 + 2 \cdot 9 & 4 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 2 & 9 \cdot 7 + 9 \cdot 8 & 9 \cdot 7 \\
\hline
 & 6 & 13 & 14 & 6 & \\
1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Negative Ziffern

Vedische Vorgehensweise $499 \cdot 287 = 50\bar{1} \cdot 3\bar{1}\bar{3} = 143213$:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 5 & 0 & \bar{1} \\
 & & & 3 & \bar{1} & \bar{3} \\
\hline
 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot \bar{1} + 0 \cdot 3 & 5 \cdot \bar{3} + 0 \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot 3 & 0 \cdot \bar{3} + \bar{1} \cdot \bar{1} & \bar{1} \cdot \bar{3} \\
\hline
 & & \bar{1} & & & \\
1 & 5 & \bar{6} & \bar{8} & 1 & 3 \\
\hline
1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Negative Ziffern

Europäische Vorgehensweise $499 \cdot 287 = 50\bar{1} \cdot 3\bar{1}\bar{3} = 143213$:

$$
\begin{array}{r}
50\bar{1} \cdot 3\bar{1}\bar{3} \\
\hline
150\bar{3} \\
\bar{5}01 \\
\bar{1}\bar{5}03 \\
\hline
15\bar{6}\bar{8}13 \\
\hline
143213 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Spezielle Multiplikationsformeln

Basic Formula

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (x+a)(x+b) = x(x+a+b) + ab = x(A+b) + ab \\ &= x(B+a) + ab\ . \end{aligned}$$

Spezielle Multiplikationsformeln Basis 10

Basic Formula

$$A \cdot B = (x+a)(x+b) = x(x+a+b)+ab = x(A+b)+ab = x(B+a)+ab\,.$$

Beispiel: $9 \cdot 8 = 72$

$$\begin{array}{cc} 9 & -1 \\ 8 & -2 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

Spezielle Multiplikationsformeln Basis 10

Basic Formula

$$A \cdot B = (x+a)(x+b) = x(x+a+b)+ab = x(A+b)+ab = x(B+a)+ab\ .$$

Beispiel: $9 \cdot 8 = 72$

$$\begin{array}{cc} 9 & -1 \\ 8 & -2 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

Beispiel: $19 \cdot 18$

$$\begin{array}{cc} 19 & 9 \\ 18 & 8 \\ \hline 27 & 72 \end{array}$$

Spezielle Multiplikationsformeln Basis 10

Basic Formula

$$A \cdot B = (x+a)(x+b) = x(x+a+b)+ab = x(A+b)+ab = x(B+a)+ab \,.$$

Beispiel: $9 \cdot 8 = 72$

$$\begin{array}{cc} 9 & -1 \\ 8 & -2 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

Beispiel: $19 \cdot 18 = 342$

$$\begin{array}{cc} 19 & 9 \\ 18 & 8 \\ \hline 27 & 72 \end{array}$$

Zahlen in der Nähe von Hundert

Zahlen nahe 100

Jetzt wird $x = 100$ gesetzt und die 100^1-Position kreuzweise berechnet, die 100^0-Position durch Multiplikation:

Beispiel: $91 \cdot 88$

91	-9
88	-12
79	108

Zahlen in der Nähe von Hundert

Zahlen nahe 100

Jetzt wird $x = 100$ gesetzt und die 100^1-Position kreuzweise berechnet, die 100^0-Position durch Multiplikation:

Beispiel: $91 \cdot 88 = 8008$

91	-9
88	-12
79	108

Zahlen in der Nähe von Hundert

Zahlen nahe 100

Jetzt wird $x = 100$ gesetzt und die 100^1-Position kreuzweise berechnet, die 100^0-Position durch Multiplikation:

Beispiel: $91 \cdot 88 = 8008$

$$\begin{array}{cc} 91 & -9 \\ 88 & -12 \\ \hline 79 & 108 \end{array}$$

Beispiel: $91 \cdot 112$

$$\begin{array}{cc} 91 & -9 \\ 112 & 12 \\ \hline 103 & -108 \end{array}$$

Zahlen in der Nähe von Hundert

Zahlen nahe 100

Jetzt wird $x = 100$ gesetzt und die 100^1-Position kreuzweise berechnet, die 100^0-Position durch Multiplikation:

Beispiel: $91 \cdot 88 = 8008$

$$\begin{array}{rr} 91 & -9 \\ 88 & -12 \\ \hline 79 & 108 \end{array}$$

Beispiel: $91 \cdot 112 = 10192$

$$\begin{array}{rr} 91 & -9 \\ 112 & 12 \\ \hline 103 & -108 \end{array}$$

$10300 - 108 = 10192.$

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von Fünfzig

Formel

$(50 + a)(50 + b) = 50(50 + a + b) + ab = \frac{100(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 100, divisor 2

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von Fünfzig

Formel

$(50 + a)(50 + b) = 50(50 + a + b) + ab = \frac{100(50+a+b)}{2} + ab$:

Basis 100, divisor 2

Beispiel: $48 \cdot 53$

48	-2
53	3
51	-6

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von Fünfzig

Formel

$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = \frac{100(50+a+b)}{2} + ab$:

Basis 100, divisor 2

Beispiel: $48 \cdot 53 = 2544$

48	-2
53	3
51	-6
25	50-6

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von Fünfzig

Formel

$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = \frac{100(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 100, divisor 2

Alternativ:

$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = 5 \cdot 10(50+a+b) + ab$:
Basis 10, Faktor 5

Beispiel: $48 \cdot 53 = 2544$

48	-2
53	3
51	-6
25	50-6

Beispiel:

$48 \cdot 53$

48	-2
53	3
51	-6
255	-6

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von Fünfzig

Formel

$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = \frac{100(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 100, divisor 2

Alternativ:

$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = 5 \cdot 10(50+a+b) + ab$:
Basis 10, Faktor 5

Beispiel: $48 \cdot 53 = 2544$

48	-2
53	3
51	-6
25	50-6

Beispiel:

$48 \cdot 53 = 2550 - 6 = 2544$

48	-2
53	3
51	-6
255	-6

Spezielle Multiplikationsformeln   Zahlen in der Nähe von Fünfzig

Formel

$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = \frac{100(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 100, divisor 2
Alternativ:
$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = 5 \cdot 10(50+a+b) + ab$:
Basis 10, Faktor 5

Beispiel: $32 \cdot 63$

32	-18
63	13
45	-234
225	-234

N.B.:

18	8
13	3
21	24
23	4

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von Fünfzig

Formel

$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = \frac{100(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 100, divisor 2

Alternativ:
$(50+a)(50+b) = 50(50+a+b) + ab = 5 \cdot 10(50+a+b) + ab$:
Basis 10, Faktor 5

Beispiel: $32 \cdot 63 = 2250 - 234 = 2016$

32	-18
63	13
45	-234
225	-234

N.B.:

18	8
13	3
21	24
23	4

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von 250

Beispiel: $260 \cdot 244$

Basis 1000, Divisor 4:

$$\begin{array}{rr} 260 & 10 \\ 244 & -6 \\ \hline 254 & -60 \\ \hline 63 + \frac{1}{2} & -60 \end{array}$$

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von 250

Beispiel: $260 \cdot 244 = 63440$

Basis 1000, Divisor 4:

$$\begin{array}{rr} 260 & 10 \\ 244 & -6 \\ \hline 254 & -60 \\ \hline 63 + \frac{1}{2} & -60 \end{array}$$

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von 500

Formel

$(500 + a)(500 + b) = 500(500 + a + b) + ab = \frac{1000(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 1000, divisor 2

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von 500

Formel

$(500+a)(500+b) = 500(500+a+b)+ab = \frac{1000(50+a+b)}{2}+ab$:
Basis 1000, divisor 2

Beispiel: $505 \cdot 372$

505	5
372	-128
377	-640
188.5	-640
187	500+360

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von 500

Formel

$(500 + a)(500 + b) = 500(500 + a + b) + ab = \frac{1000(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 1000, divisor 2

Beispiel: $505 \cdot 372 = 187860$

505	5
372	-128
377	-640
188.5	-640
187	500+360

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von 500

Formel

$(500+a)(500+b) = 500(500+a+b) + ab = \frac{1000(50+a+b)}{2} + ab$:

Basis 1000, divisor 2

Alternativ:

$(500+a)(500+b) = 500(500+a+b) + ab = 5 \cdot 100(50+a+b) + ab$:

Basis 100, Faktor 5

Beispiel: $505 \cdot 372 = 187860$

505	5
372	-128
377	-640
188.5	-640
187	500+360

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von 500

Formel

$(500+a)(500+b) = 500(500+a+b) + ab = \frac{1000(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 1000, divisor 2

Alternativ:

$(500+a)(500+b) = 500(500+a+b) + ab = 5 \cdot 100(50+a+b) + ab$:
Basis 100, Faktor 5

Beispiel: $505 \cdot 372 = 187860$

505	5
372	-128
377	-640
188.5	-640
187	500+360

Beispiel: $505 \cdot 372$

505	5
372	-128
377	-640
1885	-640

Spezielle Multiplikationsformeln Zahlen in der Nähe von 500

Formel

$(500 + a)(500 + b) = 500(500 + a + b) + ab = \frac{1000(50+a+b)}{2} + ab$:
Basis 1000, divisor 2

Alternativ:

$(500 + a)(500 + b) = 500(500 + a + b) + ab = 5 \cdot 100(50 + a + b) + ab$:
Basis 100, Faktor 5

Beispiel: $505 \cdot 372 = 187860$

505	5
372	-128
377	-640
188.5	-640
187	500+360

Beispiel: $505 \cdot 372 = 188500 - 640 = 187860$

505	5
372	-128
377	-640
1885	-640

Spezielle Multiplikationsformeln Produkte mit gleichem Zehneranteil

Formel

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (10x + a)(10x + b) = 100x^2 + 10x(a + b) + ab \\ &= 10x(10x + a + b) + ab \\ &= 10x(A + b) + ab = 10x(a + B) + ab \end{aligned}$$

Spezielle Multiplikationsformeln Produkte mit gleichem Zehneranteil

Formel

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (10x + a)(10x + b) = 100x^2 + 10x(a + b) + ab \\ &= 10x(10x + a + b) + ab \\ &= 10x(A + b) + ab = 10x(a + B) + ab \end{aligned}$$

Beispiele

- $23 \cdot 28 = 20 \cdot (23 + 8) + 3 \cdot 8 = 20 \cdot 31 + 24 = 644$,
- $23 \cdot 38 = 20 \cdot (23 + 18) + 3 \cdot 18 = 20 \cdot 41 + 54 = 874$,
- $23 \cdot 38 = 30 \cdot (23 + 8) - 7 \cdot 8 = 30 \cdot 31 - 56 = 874$,
- $37 \cdot 44 = 40 \cdot (37 + 4) - 3 \cdot 4 = 40 \cdot 41 - 12 = 1628$.

Spezielle Multiplikationsformeln Produkte mit gleichem Zehneranteil

Formel

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (10x + a)(10x + b) = 100x^2 + 10x(a + b) + ab \\ &= 10x(10x + a + b) + ab \\ &= 10x(A + b) + ab = 10x(a + B) + ab \end{aligned}$$

Beispiele

- $23 \cdot 28 = 20 \cdot (23 + 8) + 3 \cdot 8 = 20 \cdot 31 + 24 = 644$,
- $23 \cdot 38 = 20 \cdot (23 + 18) + 3 \cdot 18 = 20 \cdot 41 + 54 = 874$,
- $23 \cdot 38 = 30 \cdot (23 + 8) - 7 \cdot 8 = 30 \cdot 31 - 56 = 874$,
- $37 \cdot 44 = 40 \cdot (37 + 4) - 3 \cdot 4 = 40 \cdot 41 - 12 = 1628$.

Spezielle Multiplikationsformeln Produkte mit gleichem Zehneranteil

Formel

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (10x + a)(10x + b) = 100x^2 + 10x(a + b) + ab \\ &= 10x(10x + a + b) + ab \\ &= 10x(A + b) + ab = 10x(a + B) + ab \end{aligned}$$

Beispiele

- $23 \cdot 28 = 20 \cdot (23 + 8) + 3 \cdot 8 = 20 \cdot 31 + 24 = 644$,
- $23 \cdot 38 = 20 \cdot (23 + 18) + 3 \cdot 18 = 20 \cdot 41 + 54 = 874$,
- $23 \cdot 38 = 30 \cdot (23 + 8) - 7 \cdot 8 = 30 \cdot 31 - 56 = 874$,
- $37 \cdot 44 = 40 \cdot (37 + 4) - 3 \cdot 4 = 40 \cdot 41 - 12 = 1628$.

Spezielle Multiplikationsformeln Produkte mit gleichem Zehneranteil

Formel

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (10x + a)(10x + b) = 100x^2 + 10x(a + b) + ab \\ &= 10x(10x + a + b) + ab \\ &= 10x(A + b) + ab = 10x(a + B) + ab \end{aligned}$$

Beispiele

- $23 \cdot 28 = 20 \cdot (23 + 8) + 3 \cdot 8 = 20 \cdot 31 + 24 = 644$,
- $23 \cdot 38 = 20 \cdot (23 + 18) + 3 \cdot 18 = 20 \cdot 41 + 54 = 874$,
- $23 \cdot 38 = 30 \cdot (23 + 8) - 7 \cdot 8 = 30 \cdot 31 - 56 = 874$,
- $37 \cdot 44 = 40 \cdot (37 + 4) - 3 \cdot 4 = 40 \cdot 41 - 12 = 1628$.

Spezielle Multiplikationsformeln Summe der Einerstellen gleich zehn

Formel

$$(10x + a)(10x + b) = 100x^2 + 10x(a + b) + ab = 100x(x + 1) + ab$$

Spezielle Multiplikationsformeln Summe der Einerstellen gleich zehn

Formel

$$(10x + a)(10x + b) = 100x^2 + 10x(a + b) + ab = 100x(x + 1) + ab$$

Beispiele

- $93 \cdot 97 = 100 \cdot 9 \cdot 10 + 21 = 9021$
- $44 \cdot 46 = 100 \cdot 4 \cdot 5 + 24 = 2024$

Spezielle Multiplikationsformeln Summe der Einerstellen gleich zehn

Formel

$$(10x + a)(10x + b) = 100x^2 + 10x(a + b) + ab = 100x(x + 1) + ab$$

Beispiele

- $93 \cdot 97 = 100 \cdot 9 \cdot 10 + 21 = 9021$
- $44 \cdot 46 = 100 \cdot 4 \cdot 5 + 24 = 2024$

Spezielle Multiplikationsformeln Summe der 100er Reste gleich 100

Formel

$$(100x+a)(100x+b) = 10000x^2+100x(a+b)+ab = 10000x(x+1)+ab$$

Spezielle Multiplikationsformeln Summe der 100er Reste gleich 100

Formel

$$(100x+a)(100x+b) = 10000x^2+100x(a+b)+ab = 10000x(x+1)+ab$$

Beispiel

- $123 \cdot 177 = 10000 \cdot 1 \cdot 2 + 23 \cdot 77 = 20000 + 1771 = 21771$

Spezielle Multiplikationsformeln Dritte binomische Formel

Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Spezielle Multiplikationsformeln Dritte binomische Formel

Formel

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiele

- $24 \cdot 26 = (25-1)(25+1) = 625 - 1 = 624$,
- $104 \cdot 96 = (100+4)(100-4) = 10000 - 16 = 9984$.

Spezielle Multiplikationsformeln — Dritte binomische Formel

Formel

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiele

- $24 \cdot 26 = (25-1)(25+1) = 625 - 1 = 624$,
- $104 \cdot 96 = (100+4)(100-4) = 10000 - 16 = 9984$.

Quadratzahlen

Zahlen in der Nähe einer Zehnerpotenz

Formel

$A^2 = (10^n + a)^2 = 10^n(10^n + a + a) + a^2 = 10^n(A + a) + a^2$

Beispiele

- $$\begin{array}{cc} 13 & 3 \\ 13 & 3 \\ \hline 16 & 9 \end{array}$$
  oder kurz $13^2 = 10 \cdot (13 + 3) + 9 = 169$
- $107^2 = 100(107 + 7) + 7^2 = 11449$
- $93^2 = 100(93 - 7) + 49 = 8649$

Quadratzahlen

Zahlen in der Nähe einer Zehnerpotenz

Formel

$$A^2 = (10^n + a)^2 = 10^n(10^n + a + a) + a^2 = 10^n(A + a) + a^2$$

Beispiele

- $$\begin{array}{cc} 13 & 3 \\ 13 & 3 \\ \hline 16 & 9 \end{array}$$ oder kurz $13^2 = 10 \cdot (13 + 3) + 9 = 169$
- $107^2 = 100(107 + 7) + 7^2 = 11449$
- $93^2 = 100(93 - 7) + 49 = 8649$

Quadratzahlen

Zahlen in der Nähe einer Zehnerpotenz

Formel

$$A^2 = (10^n + a)^2 = 10^n(10^n + a + a) + a^2 = 10^n(A + a) + a^2$$

Beispiele

- $$\begin{array}{cc} 13 & 3 \\ 13 & 3 \\ \hline 16 & 9 \end{array}$$ oder kurz $13^2 = 10 \cdot (13 + 3) + 9 = 169$
- $107^2 = 100(107 + 7) + 7^2 = 11449$
- $93^2 = 100(93 - 7) + 49 = 8649$

Quadratzahlen

Zahlen in der Nähe einer Zehnerpotenz

Formel

$$A^2 = (10^n + a)^2 = 10^n(10^n + a + a) + a^2 = 10^n(A + a) + a^2$$

Beispiele

- $$\begin{array}{cc} 13 & 3 \\ 13 & 3 \\ \hline 16 & 9 \end{array}$$
  oder kurz $13^2 = 10 \cdot (13 + 3) + 9 = 169$
- $107^2 = 100(107 + 7) + 7^2 = 11449$
- $93^2 = 100(93 - 7) + 49 = 8649$

Quadratzahlen Zahlen in der Nähe eines Vielfachen einer Zehnerpotenz

Beispiel: 685^2

Mit Basis 100, Faktor 7

$$\begin{array}{cc} 685 & -15 \\ 685 & -15 \\ \hline 670 & 225 \end{array}$$

Quadratzahlen Zahlen in der Nähe eines Vielfachen einer Zehnerpotenz

Beispiel: 685^2

Mit Basis 100, Faktor 7

$$\begin{array}{cc} 685 & -15 \\ 685 & -15 \\ \hline 670 & 225 \end{array}$$

Das Ergebnis lautet: $7 \cdot 67000 + 225 = 469000 + 225 = 469225$.

Quadratzahlen

Zahlen mit Einerstelle 5

Formel

$$(10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x+1) + 25$$

Quadratzahlen

Zahlen mit Einerstelle 5

Formel

$$(10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x+1) + 25$$

Beispiele

- $15^2 = 100 \cdot 1 \cdot 2 + 25 = 225$
- $45^2 = 100 \cdot 4 \cdot 5 + 25 = 2025$
- $115^2 = 100 \cdot 11 \cdot 12 + 25 = 13225$
- $135^2 = 100 \cdot 13 \cdot 14 + 25 = 18225$.

Quadratzahlen

Zahlen mit Einerstelle 5

Formel

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x + 1) + 25$$

Beispiele

- $15^2 = 100 \cdot 1 \cdot 2 + 25 = 225$
- $45^2 = 100 \cdot 4 \cdot 5 + 25 = 2025$
- $115^2 = 100 \cdot 11 \cdot 12 + 25 = 13225$
- $135^2 = 100 \cdot 13 \cdot 14 + 25 = 18225$.

Quadratzahlen

Zahlen mit Einerstelle 5

Formel

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x + 1) + 25$$

Beispiele

- $15^2 = 100 \cdot 1 \cdot 2 + 25 = 225$
- $45^2 = 100 \cdot 4 \cdot 5 + 25 = 2025$
- $115^2 = 100 \cdot 11 \cdot 12 + 25 = 13225$
- $135^2 = 100 \cdot 13 \cdot 14 + 25 = 18225$.

Quadratzahlen

Zahlen mit Einerstelle 5

Formel

$$(10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x+1) + 25$$

Beispiele

- $15^2 = 100 \cdot 1 \cdot 2 + 25 = 225$
- $45^2 = 100 \cdot 4 \cdot 5 + 25 = 2025$
- $115^2 = 100 \cdot 11 \cdot 12 + 25 = 13225$
- $135^2 = 100 \cdot 13 \cdot 14 + 25 = 18225$.

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Fuß und Inch

Frage

Wie groß ist die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen 4'7" und 8'9" 4'7" and 8'9"?

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Fuß und Inch

Frage

Wie groß ist die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen 4’7” und 8’9” 4’7” and 8’9”?

Lösung:

4		7
8		9
sq.ft.	ft.·in.	sq.in.
32	92	63
32	7·12 + 8	63
32+7		63+8·12
39		159
40		15

Ergebnis:

5’7” · 8’9” = 48 sq.ft. 123 sq.in.

Mit APL2:

```
      144 144⊤×/12⊥¨(4 7)(8 9)
40 15
```

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Rupie and Anna

Frage (1 Rupie = 16 Anas; 1 Anna = 12 Pies)

Eine investierte Rupie erbringt 2 Rupien 5 Annas, welchen „Return of Invest“ bringen 4 Rupien 9 Annas?

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Rupie and Anna

Frage (1 Rupie = 16 Anas; 1 Anna = 12 Pies)

Eine investierte Rupie erbringt 2 Rupien 5 Annas, welchen „Return of Invest“ bringen 4 Rupien 9 Annas?

Lösung

2		5
4		9
Rupien	Annas	Annas

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Rupie and Anna

Frage (1 Rupie = 16 Anas; 1 Anna = 12 Pies)

Eine investierte Rupie erbringt 2 Rupien 5 Annas, welchen „Return of Invest“ bringen 4 Rupien 9 Annas?

Lösung

2		5
4		9
Rupien	Annas	Annas
8	38	$^{45}/_{16}$

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Rupie and Anna

Frage (1 Rupie = 16 Anas; 1 Anna = 12 Pies)

Eine investierte Rupie erbringt 2 Rupien 5 Annas, welchen „Return of Invest“ bringen 4 Rupien 9 Annas?

Lösung

2		5
4		9
Rupien	Annas	Annas
8	38	$^{45}/_{16}$
8	$2 \cdot 16 + 6$	$^{45}/_{16}$

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Rupie and Anna

Frage (1 Rupie = 16 Anas; 1 Anna = 12 Pies)

Eine investierte Rupie erbringt 2 Rupien 5 Annas, welchen „Return of Invest“ bringen 4 Rupien 9 Annas?

Lösung

2		5
4		9
Rupien	Annas	Annas
8	38	$^{45}/_{16}$
8	$2{\cdot}16 + 6$	$^{45}/_{16}$
8+2		$^{45}/_{16} + 6$

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Rupie and Anna

Frage (1 Rupie = 16 Anas; 1 Anna = 12 Pies)

Eine investierte Rupie erbringt 2 Rupien 5 Annas, welchen „Return of Invest“ bringen 4 Rupien 9 Annas?

Lösung

2		5
4		9
Rupien	Annas	Annas
8	38	$^{45}/_{16}$
8	$2{\cdot}16 + 6$	$^{45}/_{16}$
8+2		$^{45}/_{16} + 6$
10		$8 + {}^{13}/_{16}$

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Rupie and Anna

Frage (1 Rupie = 16 Anas; 1 Anna = 12 Pies)

Eine investierte Rupie erbringt 2 Rupien 5 Annas, welchen „Return of Invest“ bringen 4 Rupien 9 Annas?

Lösung

2		5
4		9
Rupien	Annas	Annas
8	38	$^{45}/_{16}$
8	$2{\cdot}16+6$	$^{45}/_{16}$
8+2		$^{45}/_{16}+6$
10		$8+{}^{13}/_{16}$

Ergebnis: 4 Rp.9 An. bringen einen Erlös von 10 Rp. $8\,^{13}/_{16}$ An.

Nicht-dezimale Maßeinheiten

Rupie and Anna

Frage (1 Rupie = 16 Anas; 1 Anna = 12 Pies)

Eine investierte Rupie erbringt 2 Rupien 5 Annas, welchen „Return of Invest“ bringen 4 Rupien 9 Annas?

Lösung

2		5
4		9
Rupien	Annas	Annas
8	38	$^{45}/_{16}$
8	$2{\cdot}16 + 6$	$^{45}/_{16}$
8+2		$^{45}/_{16} + 6$
10		$8 + {}^{13}/_{16}$

Ergebnis: 4 Rp.9 An. bringen einen Erlös von 10 Rp. $8\,^{13}/_{16}$ An.

Mit APL2:

```
    16 16 16⊤×/16⊥¨(2 5)(4 9)
10 8 13
```

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Periodische Dezimalzahlen

Gilt $\operatorname{ggT}(n, 10) = 1$, so beginnt die Periode des Dezimalbruchs von $^1/_n$ mit der ersten Stelle hinter dem Komma.

Periodische Dezimalzahlen — Grundlagen

Periodische Dezimalzahlen

Gilt $\operatorname{ggT}(n, 10) = 1$, so beginnt die Periode des Dezimalbruchs von ${}^{1}/_{n}$ mit der ersten Stelle hinter dem Komma.

Proof:
10 ist eine Einheit in ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$, also $n^{\varphi(n)} = 1$ mit

$$\varphi(n) = \left|\left({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right)^{\times}\right|. \qquad \square$$

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Periodische Dezimalzahlen

Gilt $\mathrm{ggT}(n, 10) = 1$, so beginnt die Periode des Dezimalbruchs von ${}^{1}/{}_{n}$ mit der ersten Stelle hinter dem Komma.

Theorem

Die letzte Ziffer der Periode des Dezimalbruchs $\dfrac{1}{n} = 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ *multipliziert mit der letzten Ziffern von n ist* $9 \mod 10$*:* $a_k \cdot n \equiv 9 \mod 10$ *.*

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Periodische Dezimalzahlen

Gilt $\mathrm{ggT}(n, 10) = 1$, so beginnt die Periode des Dezimalbruchs von $^1/_n$ mit der ersten Stelle hinter dem Komma.

Theorem

Die letzte Ziffer der Periode des Dezimalbruchs $\frac{1}{n} = 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ *multipliziert mit der letzten Ziffern von* n *ist* $9 \mod 10$*:* $a_k \cdot n \equiv 9 \mod 10$.

Proof:

$$\begin{aligned}
\underbrace{99\ldots99}_{\text{k Ziffern}} \cdot \frac{1}{n} &= \underbrace{99\ldots99}_{\text{k Ziffern}} \cdot 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} = \left(10^k - 1\right) \cdot 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} \\
&= a_1 a_2 \ldots a_k.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} - 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} \\
&= a_1 a_2 \ldots a_k
\end{aligned}$$

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Periodische Dezimalzahlen

Gilt $\mathrm{ggT}(n, 10) = 1$, so beginnt die Periode des Dezimalbruchs von $^1/_n$ mit der ersten Stelle hinter dem Komma.

Theorem

Die letzte Ziffer der Periode des Dezimalbruchs $\frac{1}{n} = 0.\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ *multipliziert mit der letzten Ziffern von* n *ist* $9 \mod 10$*:* $a_k \cdot n \equiv 9 \mod 10$.

Proof:

$$\underbrace{99...99}_{\text{k Ziffern}} \cdot \frac{1}{n} = a_1 a_2 \dots a_k$$

$$\frac{1}{n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{99...99}_{\text{k Ziffern}}} \rightarrow \underbrace{99...99}_{\text{k Ziffern}} = n \cdot a_1 a_2 \dots a_k$$

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Theorem ()

Für einen Bruch $^1/_n$ *mit* $\mathrm{ggT}(10, n) = 1$ *bilden die Reste*

$$r_0 = 1;\ r_i = 10r_{i-1} - a_i n$$

bei der Berechnung des Dezimalbruchs eine geometrische Folge modulo n *mit dem Faktor* $10 \bmod n$.

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Theorem ()

Für einen Bruch $^1/_n$ *mit* $\mathrm{ggT}(10, n) = 1$ *bilden die Reste*

$$r_0 = 1;\ r_i = 10r_{i-1} - a_i n$$

bei der Berechnung des Dezimalbruchs eine geometrische Folge modulo n *mit dem Faktor* $10 \bmod n$.

Proof:

$$\begin{array}{llll} 1 & \rightarrow & 10 = a_1 \cdot n + r_1 \quad \text{mit} \quad 10 \equiv r_1 \bmod n \\ & \rightarrow & 10r_1 = a_2 \cdot n + r_2 \quad \text{mit} \quad 10r_1 \equiv r_2 \bmod n \\ & \rightarrow & \ldots \end{array}$$

$\square$

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Theorem ()

Für einen Bruch $^1/_n$ *mit* $\text{ggT}(10, n) = 1$ *bilden die Reste*

$$r_0 = 1;\; r_i = 10r_{i-1} - a_i n$$

bei der Berechnung des Dezimalbruchs eine geometrische Folge modulo n *mit dem Faktor* $10 \bmod n$.

Beispiel

$$\frac{1}{7} \quad : \quad 1 \;\rightarrow\; 3 \;\rightarrow\; 2 \;\rightarrow\; 6 \;\rightarrow\; 4 \;\rightarrow\; 5$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Theorem ()

Für einen Bruch ${}^1/_n$ *mit* $\operatorname{ggT}(10, n) = 1$ *bilden die Reste*

$$r_0 = 1;\ r_i = 10 r_{i-1} - a_i n$$

bei der Berechnung des Dezimalbruchs eine geometrische Folge modulo n *mit dem Faktor* $10 \bmod n$*.*

Beispiel

$$\frac{1}{7} \quad : \quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

Beachte zum Satz: $7 \cdot 7 = 9$

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Theorem ($n^2 \equiv 9 \mod 10$)

Für einen Bruch $^1/_n$ *mit* $\mathrm{ggT}(10, n) = 1$ *bilden die Reste*

$$r_0 = 1;\ r_i = 10r_{i-1} - a_i n$$

bei der Berechnung des Dezimalbruchs eine geometrische Folge modulo n *mit dem Faktor* $10 \bmod n$.

Für $n^2 \equiv 9 \bmod 10$ *gilt* $a_{i-1} \equiv n \cdot r_i \bmod 10$.

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Theorem ($n^2 \equiv 9 \mod 10$)

Für einen Bruch $^1/_n$ *mit* $\mathrm{ggT}(10, n) = 1$ *bilden die Reste*

$$r_0 = 1;\ r_i = 10r_{i-1} - a_i n$$

bei der Berechnung des Dezimalbruchs eine geometrische Folge modulo n *mit dem Faktor* $10 \bmod n$.

Für $n^2 \equiv 9 \bmod 10$ *gilt* $a_{i-1} \equiv n \cdot r_i \bmod 10$.

Proof:

$$
\begin{aligned}
& r_i = 10r_{i-1} - a_{i-1} \cdot n \\
\rightarrow\quad & r_i\ n = 10r_{i-1}n - a_{i-1} \cdot n^2 \equiv -a_{i-1} \cdot (-1) \bmod 10 \\
\rightarrow\quad & r_i\ n \equiv a_{i-1} \bmod 10
\end{aligned}
$$

□

Periodische Dezimalzahlen

Grundlagen

Theorem ($n^2 \equiv 9 \mod 10$)

Für einen Bruch $^1/_n$ *mit* $\mathrm{ggT}(10, n) = 1$ *bilden die Reste*

$$r_0 = 1;\ r_i = 10r_{i-1} - a_i n$$

bei der Berechnung des Dezimalbruchs eine geometrische Folge modulo n *mit dem Faktor* $10 \bmod n$.

Für $n^2 \equiv 9 \bmod 10$ *gilt* $a_{i-1} \equiv n \cdot r_i \bmod 10$.

Beispiel

$$\frac{1}{7} \quad : \quad \cancel{1 \to} 3 \to 2 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1$$

$$\to \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Beobachtung

$$\frac{1}{7}: 1 \to 3 \to 2 \to \quad 6 \to \quad 4 \to \quad 5 \;\; (\to : \cdot 10 \quad \leftarrow : \cdot 5 \text{ denn } 10 \cdot 5 = 50)$$

$$1 \to 3 \to 2 \to -1 \to -3 \to -2 \pmod 7$$

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Beobachtung

$$\frac{1}{7}: 1 \to 3 \to 2 \to \ 6 \to \ 4 \to \ 5 \ (\to : \cdot 10 \quad \leftarrow : \cdot 5 \text{ denn } 10 \cdot 5 = 50)$$

$$1 \to 3 \to 2 \to -1 \to -3 \to -2 \pmod 7)$$

Die Reste der zweiten Hälfte zu den Resten der ersten Hälfte addiert ergibt jeweils 7.

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Beobachtung

$\frac{1}{7}: 1 \to 3 \to 2 \to 6 \to 4 \to 5 \ (\to : \cdot 10 \quad \leftarrow : \cdot 5 \text{ denn } 10 \cdot 5 = 50)$

$1 \to 3 \to 2 \to -1 \to -3 \to -2 \pmod 7$

Theorem

Ist die Länge der Periode gerade, so ist die Summe der Reste der ersten Hälfte und der Reste der zweiten Hälfte gleich dem Nenner. Präziser bei größeren Nenner: Nimmt man die zweite Hälfte Reste negativ, so sind die Summen null.

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Beobachtung

$$\frac{1}{7}: 1 \to 3 \to 2 \to 6 \to 4 \to 5 \;(\to : \cdot 10 \quad \leftarrow : \cdot 5 \text{ denn } 10 \cdot 5 = 50)$$
$$1 \to 3 \to 2 \to -1 \to -3 \to -2 \pmod 7)$$

Theorem

Ist die Länge der Periode gerade, so ist die Summe der Reste der ersten Hälfte und der Reste der zweiten Hälfte gleich dem Nenner. Präziser bei größeren Nenner: Nimmt man die zweite Hälfte Reste negativ, so sind die Summen null.

Proof: Mit der Periodenlänge l gilt $\left(10^{l/2}\right)^2 = 10^l = 1$ und damit $10^{l/2} = -1$. Andernfalls wäre die Periodenlänge $l/2$. □

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Theorem

Ist die Länge der Periode gerade, so ist die Summe der Reste der ersten Hälfte und der Reste der zweiten Hälfte gleich dem Nenner. Präziser bei größeren Nenner: Nimmt man die zweite Hälfte Reste negativ, so sind die Summen null.

Beispiele: Siebtel

$$\begin{array}{lccccccc} & (1\to) & 3\to & 2\to & 6\to & 4\to & 5\to & 1 \\ \frac{1}{7} = 0. & & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\ & (2\to) & 6\to & 4\to & 5\to & 1\to & 3\to & 2 \\ \frac{2}{7} = 0. & & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & 4 \end{array}$$

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Theorem

Ist die Länge der Periode gerade, so ist die Summe der Reste der ersten Hälfte und der Reste der zweiten Hälfte gleich dem Nenner. Präziser bei größeren Nenner: Nimmt man die zweite Hälfte Reste negativ, so sind die Summen null.

Beispiele: Siebtel

$$\begin{array}{llllllll} & (1\to) & 3\to & 2\to & 6\to & 4\to & 5\to & 1 \\ \frac{1}{7}=0. & & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\ & (2\to) & 6\to & 4\to & 5\to & 1\to & 3\to & 2 \\ \frac{2}{7}=0. & & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & 4 \\ \frac{5}{7}=0. & & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 \end{array}$$

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Beispiele Dreizehntel

$$\begin{array}{lccccccc} & (1\rightarrow)\,10 & \rightarrow 9 & \rightarrow 12 & \rightarrow 3 & \rightarrow 4 & \rightarrow 1 \\ \frac{1}{13} = 0. & 0 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 \end{array}$$

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Beispiele Dreizehntel

$$
\begin{array}{llcccccc}
 & (1\rightarrow) & 10\rightarrow & 9\rightarrow & 12\rightarrow & 3\rightarrow & 4\rightarrow & 1 \\
\frac{1}{13}=0. & & 0 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 \\
 & (2\rightarrow) & 7\rightarrow & 5\rightarrow & 11\rightarrow & 6\rightarrow & 8\rightarrow & 2 \\
\frac{2}{13}=0. & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6
\end{array}
$$

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Beispiele Dreizehntel

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & (1\to)\,10 & \to 9 & \to 12 & \to 3 & \to 4 & \to 1 \\
\frac{1}{13} = 0. & 0 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 \\
 & (2\to)\,7 & \to 5 & \to 11 & \to 6 & \to 8 & \to 2 \\
\frac{2}{13} = 0. & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\frac{5}{13} = 0. & 3 & 8 & 4 & 6 & 1 & 5 \quad \text{(endet mit 5)}
\end{array}
$$

Periodische Dezimalzahlen

Weitere Ergebnisse

Beispiele Dreizehntel

$$\begin{array}{llcccccc}
 & (1\rightarrow) & 10\rightarrow & 9\rightarrow & 12\rightarrow & 3\rightarrow & 4\rightarrow & 1 \\
\frac{1}{13} = 0. & & 0 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 \\
 & (2\rightarrow) & 7\rightarrow & 5\rightarrow & 11\rightarrow & 6\rightarrow & 8\rightarrow & 2 \\
\frac{2}{13} = 0. & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\frac{5}{13} = 0. & & 3 & 8 & 4 & 6 & 1 & 5 & \text{(endet mit 5)} \\
\frac{11}{13} = 0. & & 8 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & \text{(endet mit 3)}
\end{array}$$

Periodische Dezimalzahlen Divisor größer 10, endet auf 9

$$\frac{1}{n} = 0.0a_2a_3\ldots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1\;0a_2a_3\ldots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1\;\ldots$$

Mit $n = 10m - 1$ folgt (Multiplikation immer mit Übertrag!)

$$\begin{aligned} 1 &= \left(10m \cdot \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= (m \cdot 0).(ma_2)(ma_3)\ldots(ma_{k-3})(ma_{k-2})(ma_{k-1})m * \\ &\quad -0.0a_2a_3\ldots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1 \end{aligned}$$

und von links nach rechts kann man teilen!

Periodische Dezimalzahlen Divisor größer 10, endet auf 9

$$\frac{1}{n} = 0.0a_2a_3\ldots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1\ 0a_2a_3\ldots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1\ \ldots$$

Mit $n = 10m - 1$ folgt (Multiplikation immer mit Übertrag!)

$$\begin{aligned} 1 &= \left(10m \cdot \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= (m \cdot 0).(ma_2)(ma_3)\ldots(ma_{k-3})(ma_{k-2})(ma_{k-1})m * \\ &\quad -0.0a_2a_3\ldots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1 \end{aligned}$$

und hieraus $a_{k-1} = m \cdot a_k$, aber immer mit Übertrag.

Periodische Dezimalzahlen Divisor größer 10, endet auf 9

$$\frac{1}{n} = 0.0a_2a_3\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1\ 0a_2a_3\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1\ \dots$$

Mit $n = 10m - 1$ folgt (Multiplikation immer mit Übertrag!)

$$\begin{aligned} 1 &= \left(10m \cdot \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= (m \cdot 0).(ma_2)(ma_3)\dots(ma_{k-3})(ma_{k-2})(ma_{k-1})m * \\ &\quad -0.0a_2a_3\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1 \end{aligned}$$

und von links nach rechts kann man teilen! und hieraus $a_{k-1} = m \cdot a_k$,

aber immer mit Übertrag. Also gilt $\frac{1}{19} = 0.052631578947368421$

Periodische Dezimalzahlen Divisor größer 10, endet auf 9

$$\frac{1}{n} = 0.0a_2a_3\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1\ 0a_2a_3\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1\ \dots$$

Mit $n = 10m - 1$ folgt (Multiplikation immer mit Übertrag!)

$$\begin{aligned} 1 &= \left(10m \cdot \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= (m \cdot 0).(ma_2)(ma_3)\dots(ma_{k-3})(ma_{k-2})(ma_{k-1})m * \\ &\quad -0.0a_2a_3\dots a_{k-3}a_{k-2}a_{k-1}1 \end{aligned}$$

und von links nach rechts kann man teilen! und hieraus $a_{k-1} = m \cdot a_k$, aber immer mit Übertrag. Also gilt

$$\frac{1}{19} = 0.052631578947368421 = 0.052631578|947368421$$

Periodische Dezimalzahlen   Divisor größer 10, endet auf 9

Beispiele

1. $\frac{1}{19} = 0.052631578|947368421$. Und von links nach rechts kann man teilen!
2. $\frac{1}{29} = 0.03448275862068|96551724137931$
3. $\frac{1}{39} = 0.025641$
   Keine 9-komplementäre Folge in erster und zweiter Hälfte, sondern 6-komplementär!
4. $\frac{1}{49} = 0.020408163265306122448|979591836734693877551$

Periodische Dezimalzahlen

Divisor größer 10, endet auf 9

Beispiele

1. $\frac{1}{19} = 0.052631578|947368421$. Und von links nach rechts kann man teilen!
2. $\frac{1}{29} = 0.03448275862068|96551724137931$
3. $\frac{1}{39} = 0.025641$

   Keine 9-komplementäre Folge in erster und zweiter Hälfte, sondern 6-komplementär!
4. $\frac{1}{49} = 0.020408163265306122448|979591836734693877551$

Periodische Dezimalzahlen

Divisor größer 10, endet auf 9

Beispiele

1. $\frac{1}{19} = 0.052631578|947368421$. Und von links nach rechts kann man teilen!
2. $\frac{1}{29} = 0.03448275862068|96551724137931$
3. $\frac{1}{39} = 0.025641$

   Keine 9-komplementäre Folge in erster und zweiter Hälfte, sondern 6-komplementär!
4. $\frac{1}{49} = 0.020408163265306122448|979591836734693877551$

Periodische Dezimalzahlen Divisor größer 10, endet auf 9

Beispiele

1. $\frac{1}{19} = 0.052631578|947368421$. Und von links nach rechts kann man teilen!
2. $\frac{1}{29} = 0.0344827586206\,8|9655172413793\,1$
3. $\frac{1}{39} = 0.025641$

   Keine 9-komplementäre Folge in erster und zweiter Hälfte, sondern 6-komplementär!
4. $\frac{1}{49} = 0.020408163265306122448|979591836734693877551$

Periodische Dezimalzahlen Divisor größer 10, endet auf 9

Beispiele

1
2
3 $\frac{1}{39} = 0.025641$
4

Weitere Beispiele: Zwei Methoden!

1 $\frac{1}{13} = \frac{3}{39} = 3 \cdot 0.\overline{025641} = 0.\overline{076|923}$

und von rechts mit 4 multiplizieren!

2
3
4

Periodische Dezimalzahlen Divisor größer 10, endet auf 9

Beispiele

1.
2.
3.
4. $$\frac{1}{49} = 0.020408163265306122448|979591836734693877551$$

Weitere Beispiele: Zwei Methoden!

1.
2. $$\frac{1}{7} = \frac{7}{49} = (7 \cdot 0.\overline{020408163265306122448|979591836734693877551}) = 0.\overline{142857}$$
3.

Periodische Dezimalzahlen

Divisor größer 10, endet auf 9

Weitere Beispiele: Zwei Methoden!

1. $\frac{1}{13} = \frac{3}{39} = 3 \cdot 0.\overline{025641} = 0.\overline{076|923}$

   und von rechts mit 4 multiplizieren!

2. $\frac{1}{7} = \frac{7}{49} = 0.\overline{142857}$

3. $\frac{1}{23} = \frac{3}{69} = 0.\overline{0434782608|695652173913}$

4.

Periodische Dezimalzahlen

Divisor größer 10, endet auf 9

Weitere Beispiele: Zwei Methoden!

1. $\frac{1}{13} = \frac{3}{39} = 3 \cdot 0.\overline{025641} = 0.\overline{076|923}$

   und von rechts mit 4 multiplizieren!

2. $\frac{1}{7} = \frac{7}{49} = 0.\overline{142857}$

3. $\frac{1}{23} = \frac{3}{69} = 0.\overline{04347826086|95652173913}$

4. $\frac{1}{17} = \frac{7}{119} = 0.\overline{05882352|94117647}$

Periodische Dezimalzahlen

Divisor größer 10, endet auf 9

Beispiele

1. $\dfrac{1}{19} = 0.052631578|947368421\ .$
2.
3.
4.

Weitere Beispiele

1. $\dfrac{1}{38} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{19} = 0.0263157894786842105\ldots = 0.0\overline{263157894786842105}$
2. $\dfrac{1}{21} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{3} \cdot 0.\overline{142|857} = 0.\overline{047619}$

Periodische Dezimalzahlen — Divisor größer 10, endet auf 9

Weitere Beispiele: Zwei Methoden!

1
2 $\frac{1}{7} = \frac{7}{49} = 0.\overline{142857}$
3
4

Weitere Beispiele

1. $\frac{1}{38} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{19} = 0.0\overline{263157894786842105}$
2. $\frac{1}{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \cdot 0.\overline{142|857} = 0.\overline{047619}$

Fragen?

Was blieb offen?

Fragen?

Was blieb offen?

Vielen Dank fürs Mitrechnen !

Fragen?

Was blieb offen?

Vielen Dank fürs Mitrechnen !?