⌹ kann $\mathbb{C}$

Lösung einer linearen Differenzialgleichung

Dieter Kilsch

eh. Technische Hochschule Bingen

APL Germany - GSE Working Group Germany,
Solingen, 6. November 2017

Was kann Domino? Gleichungen lösen

Quadratischer reguläre linearer Gleichungssysteme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \quad A \in \mathbb{C}^{nn}; \vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{C}^{n} : \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

x←b⌹A

Was kann Domino? Gleichungen lösen

Quadratischer reguläre linearer Gleichungssysteme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \quad A \in \mathbb{C}^{nn}; \vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{C}^{n}: \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

```
x←b⌹A
```

Was kann Domino? Gleichungen lösen und ausgleichen

Quadratischer reguläre linearer Gleichungssysteme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \quad A \in \mathbb{C}^{nn}; \vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{C}^{n}: \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

x←b⌹A

Überbestimmte reguläre lineare Gleichungssysteme berechnen

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \quad A \in \mathbb{C}^{nm}; \vec{x}, \in \mathbb{C}^{n}; \vec{b} \in \mathbb{C}^{m} (m > n): \quad \vec{x} = \left(\overline{A^T} A\right)^{-1} \cdot \overline{A^T} \vec{b}$$

$\vec{x}$ ist minimal mit $\|A \cdot \vec{x} - \vec{b}\|$

x←b⌹A

Was kann Domino? Gleichungen lösen und ausgleichen

Quadratischer reguläre linearer Gleichungssysteme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \quad A \in \mathbb{C}^{nn}; \vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{C}^{n}: \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

x←b⌹A

Überbestimmte reguläre lineare Gleichungssysteme berechnen

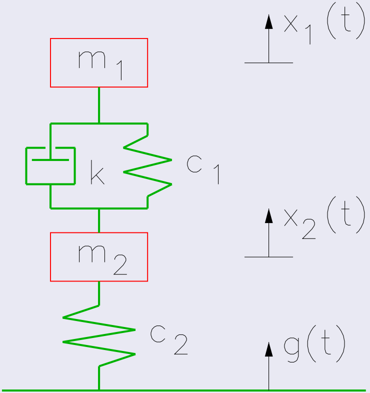
$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \quad A \in \mathbb{C}^{nm}; \vec{x}, \in \mathbb{C}^{n}; \vec{b} \in \mathbb{C}^{m} (m > n): \quad \vec{x} = \left(\overline{A^T} A\right)^{-1} \cdot \overline{A^T} \vec{b}$$

$\vec{x}$ ist minimal mit $\|A \cdot \vec{x} - \vec{b}\|$

x←b⌹A

Ein einfaches Auto-Modell

Ein Rad und die Karosserie

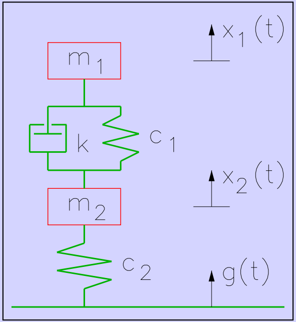


Vertikale Lage der Karosserie (x_1) und des Rads (x_2)

Die zugehörigen Differenzialgleichungen

Das Newtonsche Gesetz

$$
\begin{array}{rclclcl}
m_1\ddot{x}_1 & = & -c_1(x_1 - x_2) & - & & & k(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\
m_2\ddot{x}_2 & = & -c_1(x_2 - x_1) & - & c_2(x_2 - g(t)) & - & k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)
\end{array}
$$



Die zugehörigen Differenzialgleichungen

Das Newtonsche Gesetz

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -c_1(x_1 - x_2) - k(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\
m_2\ddot{x}_2 &= -c_1(x_2 - x_1) - c_2(x_2 - g(t)) - k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)
\end{aligned}
$$

Die Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x_2) + k(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0 \\
m_2\ddot{x}_2 + c_1(x_2 - x_1) + c_2x_2 + k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= c_2g(t)
\end{aligned}
$$

Die zugehörigen Differenzialgleichungen

Die Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rcccccccl} m_1\ddot{x}_1 & + & c_1(x_1 - x_2) & & & + & k(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) & = & 0 \\ m_2\ddot{x}_2 & + & c_1(x_2 - x_1) & + & c_2 x_2 & + & k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) & = & c_2 g(t) \end{array}$$

Das System linearer Differenzialgleichungen

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} =$$

Die zugehörigen Differenzialgleichungen

Die Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rcccccccc} m_1\ddot{x}_1 & + & c_1(x_1 - x_2) & & & + & k(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) & = & 0 \\ m_2\ddot{x}_2 & + & c_1(x_2 - x_1) & + & c_2x_2 & + & k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) & = & c_2g(t) \end{array}$$

Das System linearer Differenzialgleichungen mit Störfunktion

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{c_1}{m_2} & -\frac{c_1 + c_2}{m_2} & \frac{dk}{m_2} & -\frac{k}{m2} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g(t)\frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix} \\ &= A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \end{aligned}$$

Die zugehörigen Differenzialgleichungen

Das System linearer Differenzialgleichungen mit Störfunktion und Anfangsbedingung

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{c_1}{m_2} & -\frac{c_1+c_2}{m_2} & \frac{dk}{m_2} & -\frac{k}{m2} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g(t)\frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix} \\
&= A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \\
\vec{x}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g(t) = 0.1\,\mathrm{m} \text{ für } t \geq 0
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Differenzialgleichungen

Das System linearer Differenzialgleichungen mit Störfunktion und Anfangsbedingung

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -40 & 40 & -16 & 16 \\ 800 & -1800 & 320 & -320 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung: Eigenwerte der Systemmatrix A

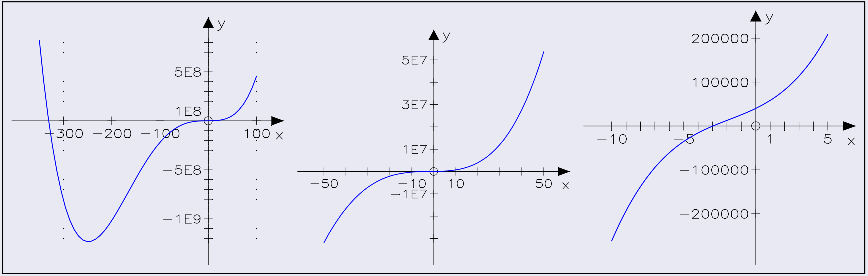
Charakteristisches Polynom und Ableitung

```
mat←4 4⍴0 0 1 0 0 0 0 1 ¯40 40 ¯16 16 800 ¯1800 320 ¯320
⍕pol0←Charpo mat
     40000 16000 1840 336 1
pol1←(⍳¯1+⍴pol0)×1↓pol0
```

Berechnung: Eigenwerte der Systemmatrix A

Charakteristisches Polynom und Ableitung

```
mat←4 4⍴0 0 1 0 0 0 0 1 ¯40 40 ¯16 16 800 ¯1800 320 ¯320
⌽pol0←Charpo mat
     40000 16000 1840 336 1
pol1←(⍳¯1+⍴pol0)×1↓pol0
```



Berechnung: Eigenwerte der Systemmatrix A

Charakteristisches Polynom und Ableitung

```
⍞pol0←Charpo mat
     40000 16000 1840 336 1
pol1←(⍳¯1+⍴pol0)×1↓pol0
```

Reelle Nullstellen

```
⍞xN←2⍕¨¯300 ¯100+Newton¨⊂(⊂'t⊥⌽pol'),¨'01'
     ¯330.5793156 ¯2.9689688
```

Berechnung: Eigenwerte der Systemmatrix A

Charakteristisches Polynom und Ableitung

```
⍕pol0←Charpo mat
```

Reelle Nullstellen

```
⍕xN←2⎕¨¯300 ¯100+Newton¨⊂(⊂'t⊥⌽pol'),¨'01'
     ¯330.5793156 ¯2.9689688
```

Horner Schema: Restpolynom

```
,r←1↓xN[2]Horner 1↓xN[1]Horner pol0
     40.75479204 2.451715606 1
```

Berechnung: Eigenwerte der Systemmatrix A

Charakteristisches Polynom und Ableitung

```
⍕pol0←Charpo mat
```

Reelle Nullstellen

```
⍕xN←2⍕¨¯300 ¯100+Newton¨⊂(⊂'t⊥⌽pol'),¨'01'
      ¯330.5793156 ¯2.9689688
```

Horner Schema: Restpolynom

```
,r←1↓xN[2]Horner 1↓xN[1]Horner pol0
     40.75479204 2.451715606 1
```

Komplexe Nullstellen

```
 ,r←(¯0.5×r[2])+1 ¯1×((0.25×r[2]*2)-r[1])*0.5
      ¯1.225857803J6.265146821 ¯1.225857803J¯6.265146821
```

Berechnung: Eigenwerte der Systemmatrix A

Charakteristisches Polynom und Ableitung

```
⍕pol0←Charpo mat
```

Reelle Nullstellen

```
⍕xN←2⎕¨¯300 ¯100+Newton¨⊂(⊂'t⊥⌽pol'),¨'01'
     ¯330.5793156 ¯2.9689688
```

Komplexe Nullstellen

```
 ,r←(¯0.5×r[2])+1 ¯1×((0.25×r[2]*2)-r[1])*0.5
       ¯1.225857803J6.265146821 ¯1.225857803J¯6.265146821
```

Eigenwerte: alle Nullstellen

```
lambda←xN,r
```

Berechnung: Eigenvektoren von A: $(A - \lambda_i \,\mathrm{Id})\vec{e}_i = \vec{0}$

Berechnung mit dem Gauß-Verfahren

```
      e←2⊃2 Gausst A-lambda[1]×Id 4⌽E←4 1⍴(,3 ¯1↑e),¯1⌽e
1 0 0 ¯0.0001526336545
0 1 0  0.00302499265
0 0 1  0.05045752903
0 0 0  0
      e←2⊃2 1 Gausst A-lambda[2]×Id 4⌽E←E,(,3 ¯1↑e),¯1⌽e
1 0 0 ¯1.927367528
0 1 0  0.3368172815
0 0 1  5.722294057
0 0 0  0
      e←2⊃2 1 Gausst A-lambda[3]×Id 4⌽E←E,(,3 ¯1↑e),¯1⌽e
1 0 0   0.1037600809J0.1530978787
0 1 0  0.03007886291J0.1537278565
0 0 1   ¯1.086375793J0.462395912
0 0 0              0
      E←E,+E[;3]                  ⍝ komplex konjugiert
```

Berechnung: Eigenvektoren von A: $(A - \lambda_i \,\mathrm{Id})\vec{e}_i = \vec{0}$

Berechnung mit dem Gauß-Verfahren

```
e←2⊃2 Gausst A-lambda[1]×Id 4⍴E←4 1⍴(,3 ¯1↑e),¯1⌽e
e←2⊃2 1 Gausst A-lambda[2]×Id 4⍴E←E,(,3 ¯1↑e),¯1⌽e
e←2⊃2 1 Gausst A-lambda[3]×Id 4⍴E←E,(,3 ¯1↑e),¯1⌽e
E←E,+E[;3]                            ⍝ komplex konjugiert
```

Die komplexe Fundamentalmatrix: $E = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$

```
      E
¯0.0001526336545  ¯1.927367528   0.1037600809J0.1530978787   0.1037600809J¯0.1530978787
   0.00302499265   0.3368172815 0.03007886291J0.1537278565  0.03007886291J¯0.1537278565
   0.05045752903    5.722294057  ¯1.086375793J0.462395912    ¯1.086375793J¯0.462395912
              ¯1             ¯1             ¯1                           ¯1
```

Berechnung: Eigenvektoren von A: $(A - \lambda_i \,\mathrm{Id})\vec{e}_i = \vec{0}$

Berechnung mit dem Gauß-Verfahren

```
e←2⊃2 Gausst A-lambda[1]×Id 4◇E←4 1⍴(,3 ¯1↑e),¯1◇e
e←2⊃2 1 Gausst A-lambda[2]×Id 4◇E←E,(,3 ¯1↑e),¯1◇e
e←2⊃2 1 Gausst A-lambda[3]×Id 4◇E←E,(,3 ¯1↑e),¯1◇e
E←E,+E[;3]                          ⍝ komplex konjugiert
```

Die komplexe Fundamentalmatrix: $E = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$

```
      E
¯0.0001526336545  ¯1.927367528   0.1037600809J0.1530978787   0.1037600809J¯0.1530978787
   0.00302499265   0.3368172815  0.03007886291J0.1537278565  0.03007886291J¯0.1537278565
   0.05045752903    5.722294057   ¯1.086375793J0.462395912    ¯1.086375793J¯0.462395912
              ¯1             ¯1             ¯1                            ¯1
```

Homogene Lösung für $\dot{\vec{x}}_h(t) = A \cdot \vec{x}_h(t)$

$$\vec{x}_h(t) = \sum_{i=1}^{4} c_i \vec{e}_i \, \mathrm{e}^{\lambda_i t}$$

Berechnung: spezielle inhomogene Lösung

Spezielle inhomogene Lösung: $\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}$

$t \gg 0: \;\; \dot{\vec{x}}(t) = \vec{0} = A\vec{x}_s + \vec{b}$

Berechnung: spezielle inhomogene Lösung

Spezielle inhomogene Lösung: $\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}$

$$t \gg 0: \ \dot{\vec{x}}(t) = \vec{0} = A\vec{x}_s + \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_s = -A^{-1}\vec{b}$$

Berechnung: spezielle inhomogene Lösung

Spezielle inhomogene Lösung: $\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}$

$$t \gg 0: \quad \dot{\vec{x}}(t) = \vec{0} = A\vec{x}_s + \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_s = -A^{-1}\vec{b}$$

```
      bs←0  0  0 100
      ,xs←-bs⌹A
0.1 0.1  0  0
```

Lösung des Anfangswertproblems

So einfach mit 🖩 in $\mathbb{C}$

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \vec{x}_s + \sum_{i=1}^{4} c_i \vec{e}_i = \vec{x}_s + E \cdot \vec{c}$$

Lösung des Anfangswertproblems

So einfach mit ⌸ in $\mathbb{C}$

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \vec{x}_s + \sum_{i=1}^{4} c_i \vec{e}_i = \vec{x}_s + E \cdot \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = E^{-1} \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_s)$$

Lösung des Anfangswertproblems

So einfach mit ⌹ in ℂ

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \vec{x}_s + \sum_{i=1}^{4} c_i \vec{e}_i = \vec{x}_s + E \cdot \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = E^{-1} \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_s)$$

```
      x0←0 0 0 0
      ,c←(x0-xs)⌹E
0.2926399848 ¯0.009464405199 ¯0.1415877898J0.290057577 ¯0.1415877898J¯0.290057577
```

Lösung des Anfangswertproblems

So einfach mit ⌹ in ℂ

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \vec{x}_s + \sum_{i=1}^{4} c_i \vec{e}_i = \vec{x}_s + E \cdot \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = E^{-1} \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_s)$$

```
      x0←0 0 0 0
      ,c←(x0-xs)⌹E
0.2926399848 ¯0.009464405199 ¯0.1415877898J0.290057577 ¯0.1415877898J¯0.290057577
```

Komplex konjugierte Anteile

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= x_s(t) + c_1 \vec{e}_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{e}_2\, e^{\lambda_3 t} + c_3 \vec{e}_3\, e^{\lambda_3 t} + c_4 \vec{e}_4\, e^{\lambda_4 t} \\
\overline{\vec{x}(t)} &= \overline{x_s(t)} + \overline{c_1 \vec{e}_1\, e^{\lambda_1 t}} + \overline{c_2 \vec{e}_2\, e^{\lambda_2 t}} + \overline{c_3}\,\overline{\vec{e}_3}\, e^{\overline{\lambda_3} t} + \overline{c_4}\,\overline{\vec{e}_4}\, e^{\overline{\lambda_4} t} \\
\vec{x}(t) &= x_s(t) + c_1 \vec{e}_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{e}_2\, e^{\lambda_2 t} + \overline{c_3}\, \vec{e}_4\, e^{\lambda_4 t} + \overline{c_4}\, \vec{e}_3\, e^{\lambda_3 t} \\
&\Rightarrow \quad c_4 = \overline{c_3}
\end{aligned}$$

Lösung des Anfangswertproblems

Komplex konjugierte Anteile

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= x_s(t) + c_1\vec{e}_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\vec{e}_2\,\mathrm{e}^{\lambda_3 t} + c_3\vec{e}_3\,\mathrm{e}^{\lambda_3 t} + c_4\vec{e}_4\,\mathrm{e}^{\lambda_4 t}\\
\overline{\vec{x}(t)} &= \overline{x_s(t)} + \overline{c_1\vec{e}_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}} + \overline{c_2\vec{e}_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}} + \overline{c_3}\,\overline{\vec{e}_3}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda_3} t} + \overline{c_4}\,\overline{\vec{e}_4}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda_4} t}\\
\vec{x}(t) &= x_s(t) + c_1\vec{e}_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\vec{e}_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \overline{c_3}\vec{e}_4\,\mathrm{e}^{\lambda_4 t} + \overline{c_4}\vec{e}_3\,\mathrm{e}^{\lambda_3 t}\\
&\Rightarrow \quad c_4 = \overline{c_3}
\end{aligned}
$$

$$
c_3\vec{e}_3\,\mathrm{e}^{\lambda_3 t} + c_4\vec{e}_4\,\mathrm{e}^{\lambda_4 t} \qquad (\text{mit } \lambda_i = \alpha_i + \mathrm{j}\,\beta_i \ (i = 3,4))
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{\alpha_3 t}\left(c_3\vec{e}_3(\cos(\beta_3 t) + \mathrm{j}\,\sin(\beta_3 t)) + \overline{c_3\vec{e}_3}(\cos(\beta_3 t) - \mathrm{j}\,\sin(\beta_3 t))\right)\\
&= \mathrm{e}^{\alpha_3 t}\,(2\,\mathrm{Re}(c_3\vec{e}_3)\cos(\beta_3 t) + 2\,\mathrm{Im}(c_4\vec{e}_4)\sin(\beta_3 t))
\end{aligned}
$$

Lösung des Anfangswertproblems

So einfach mit ⌹ in ℂ

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \vec{x}_s + \sum_{i=1}^{4} c_i \vec{e}_i = \vec{x}_s + E \cdot \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = E^{-1} \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_s)$$

```
      x0←0 0 0 0
      ,c←(x0-xs)⌹E
0.2926399848 ¯0.009464405199 ¯0.1415877898J0.290057577 ¯0.1415877898J¯0.290057577
```

Komplex konjugierte Anteile

$$c_3 \vec{e}_3 \, \mathrm{e}^{\lambda_3 t} + c_4 \vec{e}_4 \, \mathrm{e}^{\lambda_4 t} = \mathrm{e}^{\alpha_i t} \left(2 \operatorname{Re}(c_3 \vec{e}_3) \cos(\lambda_3 t) + 2 \operatorname{Im}(c_4 \vec{e}_4) \sin(\lambda_3 t)\right)$$

Die explizite Lösung mit APL

```
      1 1 2 2×[2]9 9 9 11○[2]E×[2]c
¯0.0000446671033  0.01824138725  ¯0.1181967205  ¯0.0168392148
 0.000852338033  ¯0.00318777523  ¯0.09769745857  0.02608277067
 0.01476589053   ¯0.05415810962   0.03939221909  0.7611622908
¯0.2926399848     0.009464405199  0.2831755796   0.5801151541
```

Lösung des Anfangswertproblems

Die explizite Lösung mit APL

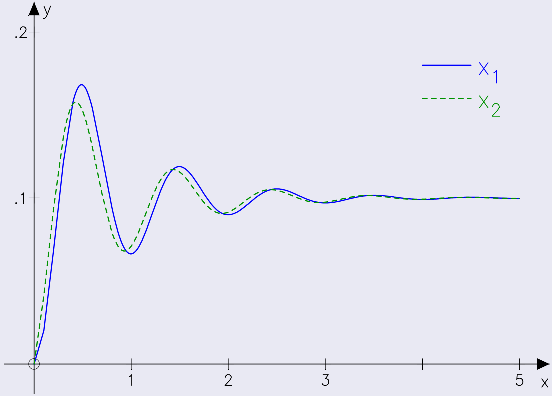
```
      1 1 2 2×[2]9 9 9 11○[2]E×[2]c
¯0.00004466671033  0.01824138725  ¯0.1181967205   ¯0.0168392148
 0.0008852338033  ¯0.00318777523  ¯0.09769745857   0.02608277067
 0.01476589053    ¯0.05415810962   0.03939221909   0.7611622908
¯0.2926399848      0.009464405199  0.2831755796    0.5801151541
```

... und schön aufgeschrieben

$$
\begin{aligned}
x(t) \quad &= \begin{pmatrix} .1 \\ .1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -.0000447 \\ .0008852 \\ .0147660 \\ -.2926400 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-330.580\,t} + \begin{pmatrix} .0182414 \\ -.0031878 \\ -.0541581 \\ .0094644 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2.96897\,t} \\
&\quad + \mathrm{e}^{-1.225858\,t} \left(\cos(6.26515\,t) \begin{pmatrix} -.1181967 \\ -.0976975 \\ .0393922 \\ .2831756 \end{pmatrix} + \sin(6.26515\,t) \begin{pmatrix} -.0168392 \\ .0260828 \\ .7611623 \\ .5801152 \end{pmatrix} \right) .
\end{aligned}
$$

Interpretation des Ergebnisses

Ein Rad und Karosserie



Vertikale Lage der Karosserie (x_1) und des Rads (x_2)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!