Mathematik und Spiele

APL-Germany – Herbsttagung 2019

Dieter Kilsch

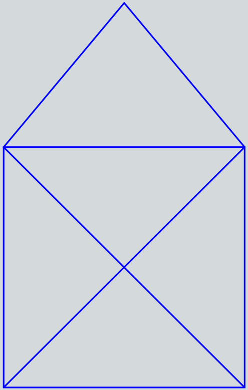
Technische Hochschule Bingen, FB 2 Technik, Informatik und Wirtschaft

Bingen am Rhein, 5. November 2019

Inhalt

Das Haus des Nikolaus

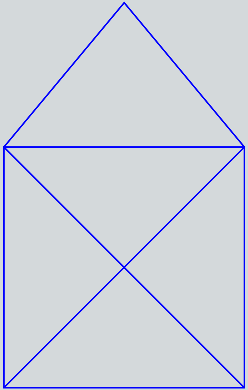
Aufgabe: In einem Zug zeichnen!



Das Haus des Nikolaus soll in einem Zug gezeichnet werden.

Das Haus des Nikolaus

Aufgabe: In einem Zug zeichnen!

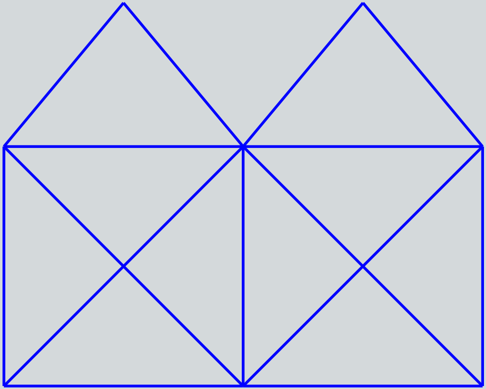


Das Haus des Nikolaus soll in einem Zug gezeichnet werden.

In welchem Knoten (Eck) muss man beginnen?

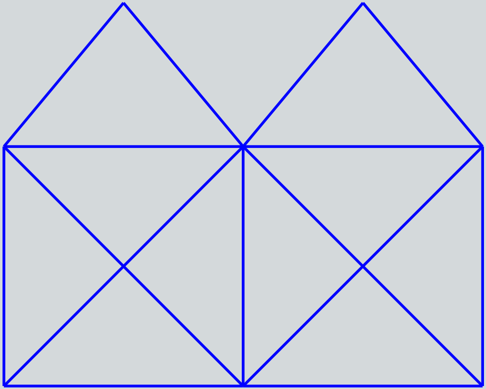
Das Doppelhaus des Nikolaus

Aufgabe: In einem Zug zeichnen!



Das Doppelhaus des Nikolaus

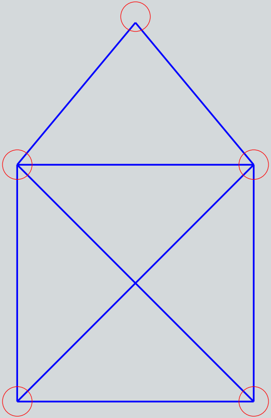
Aufgabe: In einem Zug zeichnen!



Das Doppelhaus des Nikolaus kann nicht in einem Zug gezeichnet werden.

Ecken (Knoten) und ihr Grad

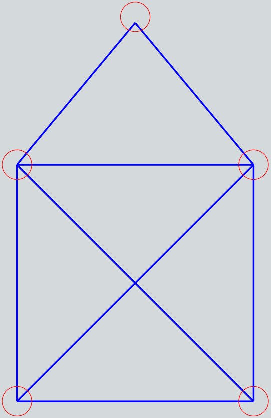
Festlegung (Graf, Knotengrad, Eulerscher Weg)



Ein Graf ist eine Menge von Knoten (Punkten) und Kanten (Linien), wobei eine Kante immer zwei Knoten verbindet.

Ecken (Knoten) und ihr Grad

Festlegung (Graf, Knotengrad, Eulerscher Weg)

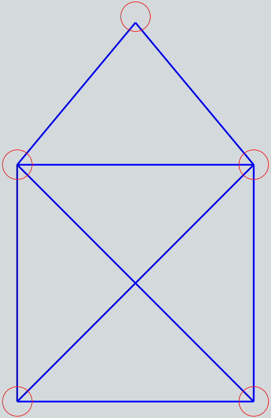


Ein Graf ist eine Menge von Knoten (Punkten) und Kanten (Linien), wobei eine Kante immer zwei Knoten verbindet.

Der Grad eines Knotens ist gleich der Anzahl der anliegenden Kanten.

Ecken (Knoten) und ihr Grad

Festlegung (Graf, Knotengrad, Eulerscher Weg)



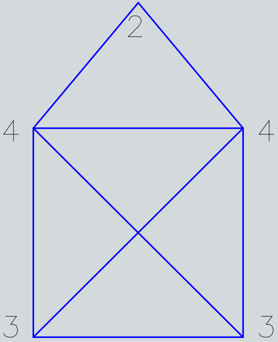
Ein Graf ist eine Menge von Knoten (Punkten) und Kanten (Linien), wobei eine Kante immer zwei Knoten verbindet.

Der Grad eines Knotens ist gleich der Anzahl der anliegenden Kanten.

Ein Weg in einem Grafen, der alle Kanten genau einmal durchläuft, heißt Eulerscher Weg.

Ecken (Knoten) und ihr Grad

Lösung

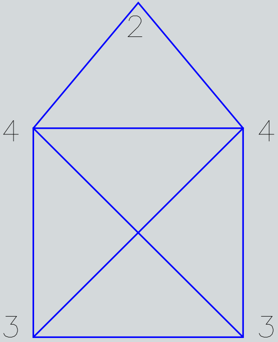


Satz (Eulerscher Weg)

Ein Graf kann genau dann in einem Zug gezeichnet werden, wenn die Anzahl der Ecken ungeraden Grades null oder zwei ist.

Ecken (Knoten) und ihr Grad

Lösung

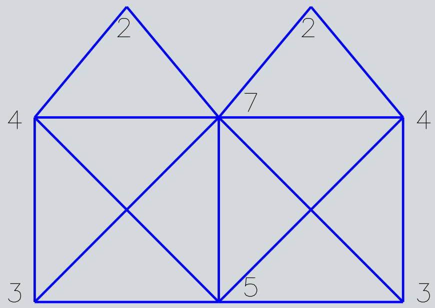


Satz (Eulerscher Weg)

Ein Graf kann genau dann in einem Zug gezeichnet werden, wenn die Anzahl der Ecken ungeraden Grades null oder zwei ist.
Ist diese Anzahl null, so kann der Eulersche Weg in jedem Knoten begonnen werden. Andernfalls muss der Eulersche Weg in einem der beiden Knoten ungeraden Grades starten und endet in dem anderen.

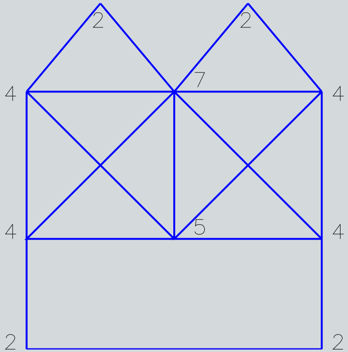
Das Doppelhaus des Nikolaus

Lösung nicht möglich!



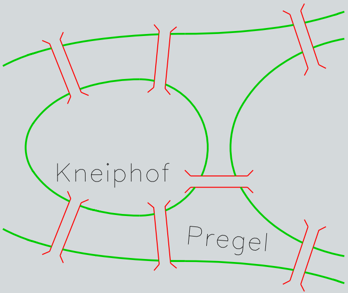
Das Doppelhaus des Nikolaus

Das Doppelhaus braucht einen Keller.



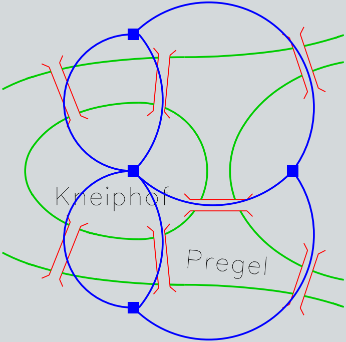
Das Königsberger Brückenproblem

Gibt es einen Sonntagsspaziergang über die Pregelbrücken?



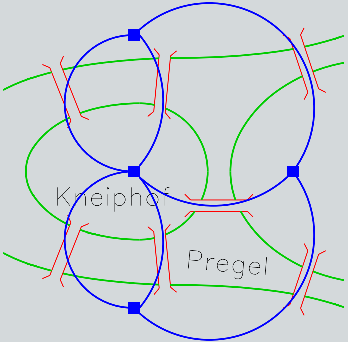
Das Königsberger Brückenproblem

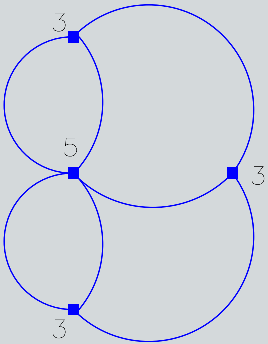
Abstraktion



Das Königsberger Brückenproblem

Abstraktion: Euler (1735): Es gibt keinen Weg!





Eulersche Wege

Leonhard Euler 1707 - 1783

1720 Studium Basel
1727 Professur St. Petersburg
1741 Kgl.-Preuß. Ak. der Wissenschaft
1766 Rückkehr St. Petersburg

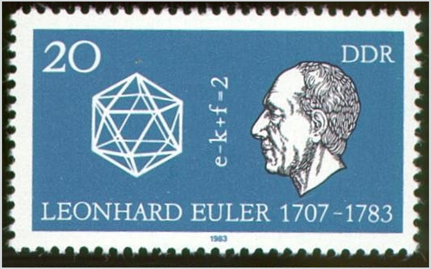
Leonhard Euler

Beiträge zu MINT

Variationsrechnung
Grafentheorie
Zahlentheorie (Grundlagen RSA)
$e^{i\pi} + 1 = 0$
Mechanik (Euler-Eytelwein)
Hydrodynamik
Kreiselbewegung

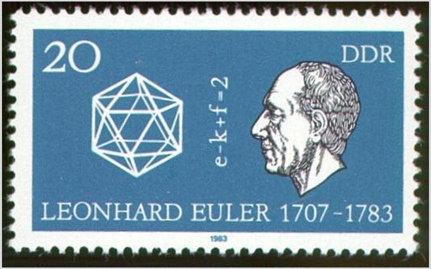
Leonhard Euler

Ehrung durch DDR (1983):



Leonhard Euler

Ehrung durch DDR (1983):



Euler-Charakteristik

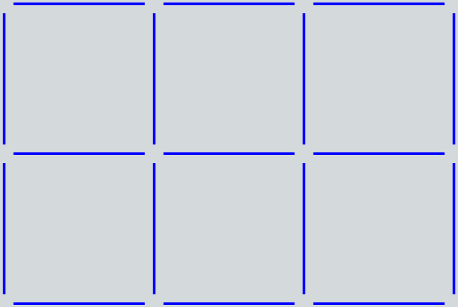
$$e - k + f = 2$$

e: Anzahl Ecken
k: Anzahl Kanten
f: Anzahl Flächen

Gültig in zusammenhängenden Grafen in $\mathbb{R}^2$ und Flächen in $\mathbb{R}^3$, z.B. Kugeloberfläche!

17 Streichhölzer

Aufgabe

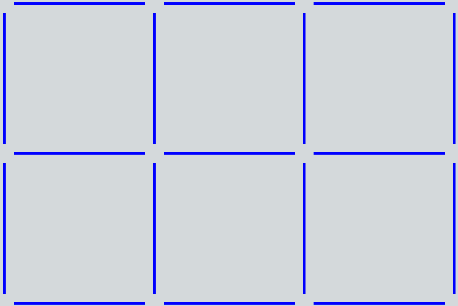


17 Streichhölzer bilden 6 Quadrate.

Nach dem Entfernen von 5 Streichhölzern bleiben 3 Quadrate übrig.

17 Streichhölzer

Lösung: $e - k + f = 2$

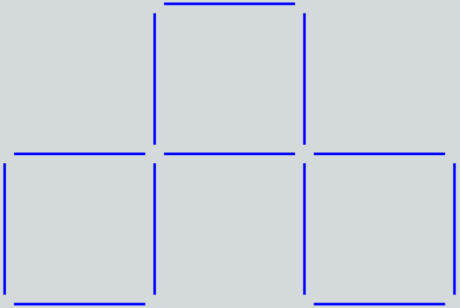


$$e - 12 + 4 = 2$$

$$\rightarrow \quad e = 10$$

17 Streichhölzer

Lösung: $e - k + f = 2$

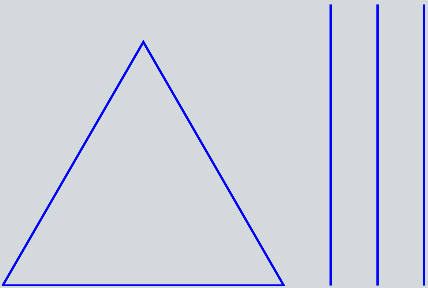


$$e - 12 + 4 = 2$$

$$\rightarrow \quad e = 10$$

Vier gleichseitige Dreiecke

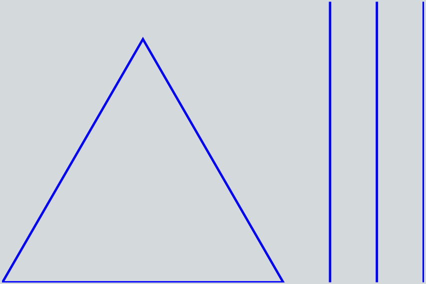
Aufgabe



Aus 6 Streichhölzern sollen 4 gleichseitige Dreiecke gebildet werden.

Vier gleichseitige Dreiecke

Lösung: $e - k + f = 2$



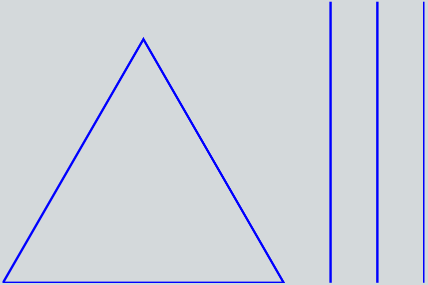
Ebene Lösung:

$e - 6 + 5 = 2$

$\rightarrow \quad e = 3 \qquad$??

Vier gleichseitige Dreiecke

Lösung: $e - k + f = 2$



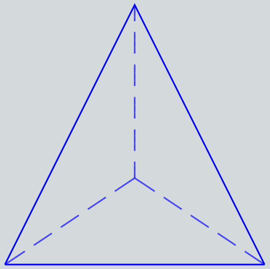
Räumliche Lösung:

$e - 6 + 4 = 2$

$\rightarrow \quad e = 4$

Vier gleichseitige Dreiecke

Lösung: $e - k + f = 2$



Räumliche Lösung:

$e - 6 + 4 = 2$

$\rightarrow \quad e = 4$

Platonische Körper

Definition

Platonische Körper sind Polyeder, deren

- *Flächen gleiche reguläre Vielecke sind,*
- *Ecken gleichen Grad haben.*

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$f \cdot m = 2k \qquad \text{und} \qquad e \cdot n = 2k$$

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$f \cdot m = 2k \qquad \text{und} \qquad e \cdot n = 2k$$

$$m \geq 3\,, \quad n \geq 3 \qquad \text{und} \qquad k \geq 4$$

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$f \cdot m = 2k \qquad \text{und} \qquad e \cdot n = 2k$$

$$m \geq 3\,, \quad n \geq 3 \qquad \text{und} \qquad k \geq 4$$

$$2 = e - k + f$$

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$f \cdot m = 2k \qquad \text{und} \qquad e \cdot n = 2k$$

$$m \geq 3\,, \quad n \geq 3 \qquad \text{und} \qquad k \geq 4$$

$$2 = e - k + f = \frac{2k}{n} - k + \frac{2k}{m}$$

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$f \cdot m = 2k \qquad \text{und} \qquad e \cdot n = 2k$$

$$m \geq 3\,, \quad n \geq 3 \qquad \text{und} \qquad k \geq 4$$

$$2 = e - k + f = \frac{2k}{n} - k + \frac{2k}{m}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$$

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right] , \qquad e = \frac{2k}{n} , \quad f = \frac{2k}{m}$$

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right] , \qquad e = \frac{2k}{n} , \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3			
4		–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \qquad e = \frac{2k}{n}, \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4		
4		–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right] , \qquad e = \frac{2k}{n} , \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder		
4		–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right] , \qquad e = \frac{2k}{n} , \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder	8,12,6	
4		–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right] , \qquad e = \frac{2k}{n} , \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder	8,12,6 Würfel	
4		–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \qquad e = \frac{2k}{n}, \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder	8,12,6 Würfel	20,30,12
4		–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \qquad e = \frac{2k}{n}, \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder	8,12,6 Würfel	20,30,12 Dodekaeder
4		–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right] , \qquad e = \frac{2k}{n} , \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder	8,12,6 Würfel	20,30,12 Dodekaeder
4	6,12,8	–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \qquad e = \frac{2k}{n}, \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder	8,12,6 Würfel	20,30,12 Dodekaeder
4	6,12,8 Oktaeder	–	–
5		–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \qquad e = \frac{2k}{n}, \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder	8,12,6 Würfel	20,30,12 Dodekaeder
4	6,12,8 Oktaeder	–	–
5	12,30,20	–	–

Platonische Körper

Platonische Körper: reguläre m-Ecke mit Eckengrad n

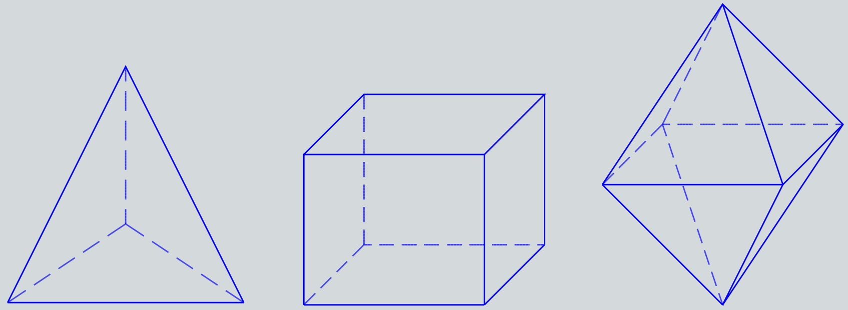
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \qquad e = \frac{2k}{n}, \quad f = \frac{2k}{m}$$

e,k,f

n\m	3	4	5
3	4,6,4 Tetraeder	8,12,6 Würfel	20,30,12 Dodekaeder
4	6,12,8 Oktaeder	–	–
5	12,30,20 Ikosaeder	–	–

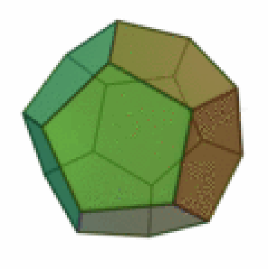
Platonische Körper

Lösung: $e - k + f = 2$

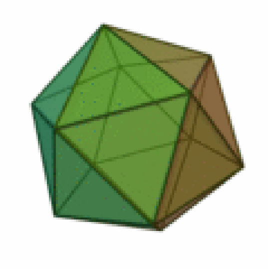


Platonische Körper

Lösung: $e - k + f = 2$



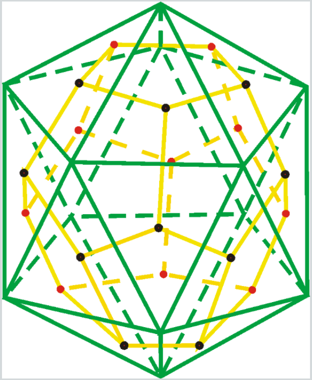
Dodekaeder (Zwölfflach)



Ikosaeder (Zwanzigflach)

Platonische Körper

Dualität $e \leftrightarrow f$: $e - k + f = 2$



Ikosaeder (Zwanzigflach)
$12 - 30 + 20 = 2$

Dodekaeder (Zwölfflach)
$20 - 30 + 12 = 2$

Eulersche Quadrate

St. Petersburg, 1766 (Eulers Problem der 36 Offiziere)

Leonard Euler erhält von Zarin Katharina der Großen den Auftrag, für den Divisionsball je 6 Offiziere verschiedenen Dienstgrads der 6 anwesenden Regimenter so im Quadrat aufzustellen, dass in jeder Reihe und jeder „Spalte“ jedes Regiment und jeder Dienstgrad einmal vertreten ist.

Eulersche Quadrate

St. Petersburg, 1766 (Eulers Problem der 36 Offiziere)

Leonard Euler erhält von Zarin Katharina der Großen den Auftrag, für den Divisionsball je 6 Offiziere verschiedenen Dienstgrads der 6 anwesenden Regimenter so im Quadrat aufzustellen, dass in jeder Reihe und jeder „Spalte“ jedes Regiment und jeder Dienstgrad einmal vertreten ist.

Allgemeine Problemstellung

Für welche natürliche Zahl gibt es Eulersche Quadrate (oder auch lateinisch-griechische Quadrate)?

Eulersche Quadrate

Eulersche Quadrate

- $n = 1 : \boxed{1a}$

Eulersche Quadrate

Eulersche Quadrate

- $n = 1$: $\begin{array}{|c|}\hline 1a \\ \hline\end{array}$
- $n = 2$: $\begin{array}{|c|c|}\hline 1a & 2b \\ \hline 2? & 1? \\ \hline\end{array}$

Eulersche Quadrate

Eulersche Quadrate

- $n = 1$:

1a

- $n = 2$:

1a	2b
2?	1?

- $n = 3$:

1a	2b	3c
2c	3a	1b
3b	1c	2a

Eulersche Quadrate

Eulersche Quadrate

- $n = 1$:

1a

- $n = 2$:

1a	2b
2?	1?

- $n = 3$:

1a	2b	3c
2c	3a	1b
3b	1c	2a

- $n = 4$:

1a	2b	3c	4d
3d	4c	1b	2a
4b	3a	2d	1c
2c	1d	4a	3b

Eulersche Quadrate

Eulersche Quadrate

- $n = 1$:

1a

- $n = 2$:

1a	2b
2?	1?

- $n = 3$:

1a	2b	3c
2c	3a	1b
3b	1c	2a

- $n = 4$:

1a	2b	3c	4d
3d	4c	1b	2a
4b	3a	2d	1c
2c	1d	4a	3b

- $n = 5$:

1a	2b	3c	4d	5e
2e	3a	4b	5c	1d
3d	4e	5a	1b	2c
4c	5d	1e	2a	3b
5b	1c	2d	3e	4a

Eulersche Quadrate

Existenz Eulerscher Quadrate

- Ungerade natürliche Zahlen: Wie bei $n = 3$ oder $n = 5$.
- $n = 4$: s.o.
- Alle ganze Zahlen, deren Rest bei Division durch 4 nicht 2 ist (Vermutung Euler 1782).
  Nachweis mit der Methode „Teile und herrsche“ für $n = 12 = 3 \cdot 4$:

1 2 3 4, a b c d	5 6 7 8, e f g h	9 10 11 12, i j k l
5 6 7 8, i j k l	9 10 11 12, a b c d	1 2 3 4, e f g h
9 10 11 12, e f g h	1 2 3 4, i j k l	5 6 7 8, a b c d

Eulersche Quadrate

Existenz Eulerscher Quadrate

- Ungerade natürliche Zahlen: Wie bei $n = 3$ oder $n = 5$.
- $n = 4$: s.o.
- Alle ganze Zahlen, deren Rest bei Division durch 4 nicht 2 ist (Vermutung Euler 1782).
  Nachweis mit der Methode „Teile und herrsche“ für $n = 12 = 3 \cdot 4$:

1 2 3 4, a b c d	5 6 7 8, e f g h	9 10 11 12, i j k l
5 6 7 8, i j k l	9 10 11 12, a b c d	1 2 3 4, e f g h
9 10 11 12, e f g h	1 2 3 4, i j k l	5 6 7 8, a b c d

Eulersche Quadrate

Existenz Eulerscher Quadrate

- Ungerade natürliche Zahlen: Wie bei $n = 3$ oder $n = 5$.
- $n = 4$: s.o.
- Alle ganze Zahlen, deren Rest bei Division durch 4 nicht 2 ist (Vermutung Euler 1782).
  Nachweis mit der Methode „Teile und herrsche“ für $n = 12 = 3 \cdot 4$:

1 2 3 4, a b c d	5 6 7 8, e f g h	9 10 11 12, i j k l
5 6 7 8, i j k l	9 10 11 12, a b c d	1 2 3 4, e f g h
9 10 11 12, e f g h	1 2 3 4, i j k l	5 6 7 8, a b c d

Eulersche Quadrate

Neuere Ergebnisse

- Zu allen Primzahlpotenzen außer 2 gibt es Eulersche Quadrate.

Eulersche Quadrate

Neuere Ergebnisse

- Zu allen Primzahlpotenzen außer 2 gibt es Eulersche Quadrate.
- Terry, 1900: Es gibt kein Eulerquadrat zu n=6.

Eulersche Quadrate

Neuere Ergebnisse

- Zu allen Primzahlpotenzen außer 2 gibt es Eulersche Quadrate.
- Terry, 1900: Es gibt kein Eulerquadrat zu n=6.
- Parker, Bose, Shrikhande, 1959: Für alle natürlichen Zahlen außer zwei und sechs gibt es Eulersche Quadrate.

Grafentheoretische Spielaufgaben

Paarer Graf: 3 Häuser mit der 3 Werken verbinden

Grafentheoretische Spielaufgaben

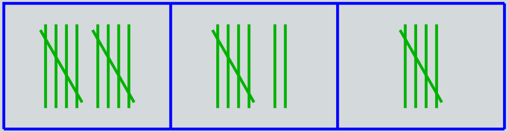
Färben von Landkarten

Das Nimmspiel

Ziel des Spiels

Zu Beginn des Nimm-Spiels werden beliebig viele Hölzer auf beliebig viele Stapel gelegt. Die beiden Spieler nehmen anschließend abwechselnd beliebig viele Hölzer von einem Stapel. Bei jedem Zug dürfen nur Hölzer von einem Stapel genommen werden, mindestens eines muss genommen werden!

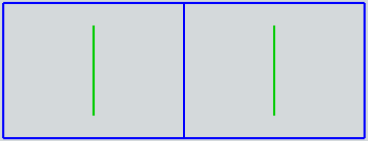
Gewonnen hat, wer das letzte Holz nimmt.



Nimm-Spiele

Wer das letzte Holz nimmt, gewinnt!

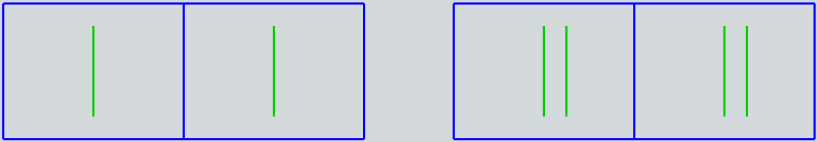
Gewinnsituationen:



Nimm-Spiele

Wer das letzte Holz nimmt, gewinnt!

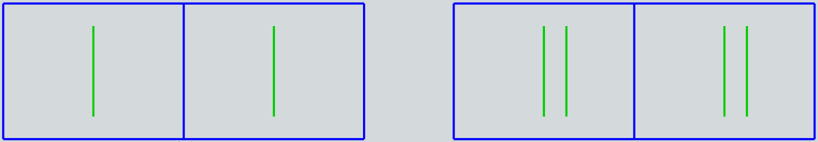
Gewinnsituationen:



Nimm-Spiele

Wer das letzte Holz nimmt, gewinnt!

Gewinnsituationen: Dualzahlen

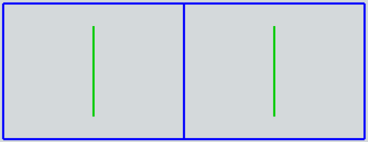


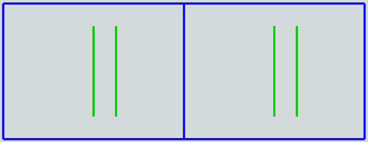
$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 1_2 \\ 1 & = & 1_2 \\ \hline & & 2 \end{array}$$

Nimm-Spiele

Wer das letzte Holz nimmt, gewinnt!

Gewinnsituationen: Dualzahlen





$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 1_2 \\ 1 & = & 1_2 \\ \hline & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 2 & = & 10_2 \\ 2 & = & 10_2 \\ \hline & & 20 \end{array}$$

Wie gewinnt man ?

Satz

Eine Gewinnsituation liegt genau dann vor, wenn alle Dualziffernsummen gerade sind.

„Beweis“

$$\begin{array}{rcr} 8 & = & 1000 \\ 10 & = & 1010 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 2222 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 8 & = & \\ 7 & = & 111 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 5 & = & 101 \\ 7 & = & 111 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 424 \end{array}$$

Wie gewinnt man ?

Satz

Eine Gewinnsituation liegt genau dann vor, wenn alle Dualziffernsummen gerade sind.

„Beweis“

$$\begin{array}{lcr} 8 & = & 1000 \\ 10 & = & 1010 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 2222 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcr} 8 & = & 1000 \\ 7 & = & 111 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 1323 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcr} 5 & = & 101 \\ 7 & = & 111 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 424 \end{array}$$

Wie gewinnt man ?

Satz

Eine Gewinnsituation liegt genau dann vor, wenn alle Dualziffernsummen gerade sind.

„Beweis“

$$\begin{array}{lcr} 8 & = & 1000 \\ 10 & = & 1010 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 2222 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcr} 8 & = & 1000 \\ 7 & = & 111 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 1323 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcr} 5 & = & 101 \\ 7 & = & 111 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 424 \end{array}$$

Wie gewinnt man ?

Satz

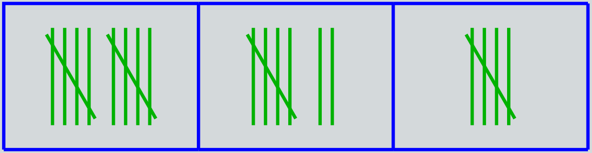
Eine Gewinnsituation liegt genau dann vor, wenn alle Dualziffernsummen gerade sind.

„Beweis“

$$\begin{array}{rcr} 8 & = & 1000 \\ 10 & = & 1010 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 2222 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 8 & = & 1000 \\ 7 & = & 111 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 1323 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 5 & = & 101 \\ 7 & = & 111 \\ 7 & = & 111 \\ 5 & = & 101 \\ \hline & & 424 \end{array}$$

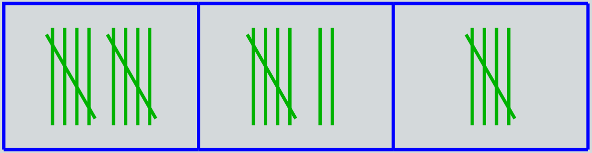
Nimm-Spiele

Die Gewinnstrategie



Nimm-Spiele

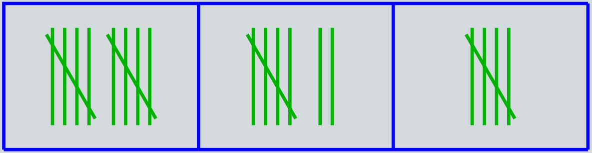
Die Gewinnstrategie



$$
\begin{array}{rcr}
10 & = & 1010_2 \\
7 & = & 111_2 \\
5 & = & 101_2 \\
\hline
 & & 1222
\end{array}
$$

Nimm-Spiele

Die Gewinnstrategie



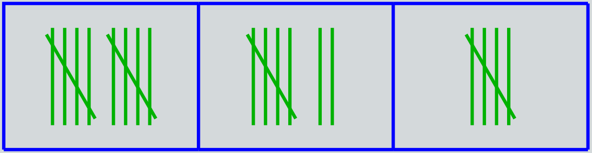
$$\begin{array}{rcr} 10 & = & 1010_2 \\ 7 & = & 111_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 1222 \end{array}$$

Ohne die größte Zahl:

$$\begin{array}{rcr} 7 & = & 111_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 212 \end{array}$$

Nimm-Spiele

Die Gewinnstrategie



$$\begin{array}{rcr} 10 & = & 1010_2 \\ 7 & = & 111_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 1222 \end{array}$$

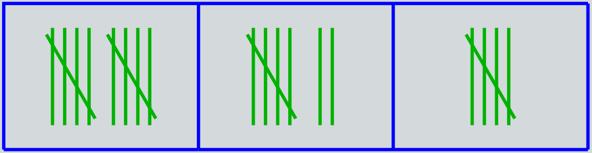
Ohne die größte Zahl:

$$\begin{array}{rcr} 7 & = & 111_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 212 \end{array}$$

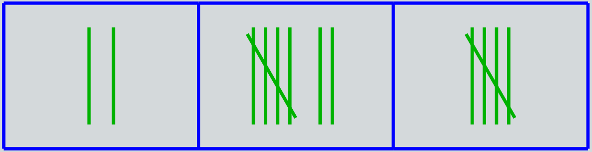
$$\begin{array}{rcr} 2 & = & 010_2 \\ 7 & = & 111_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 222 \end{array}$$

Nimm-Spiele

Die Gewinnstrategie



$$\begin{array}{rcr} 10 & = & 1010_2 \\ 7 & = & 111_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 1222 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcr} \color{orange}{2} & = & 010_2 \\ 7 & = & 111_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 222 \end{array}$$

Nimm-Spiele

Die Gewinnstrategie

Nimm-Spiele

Die Gewinnstrategie

$$
\begin{array}{rcr}
2 & = & 010_2 \\
0 & = & 000_2 \\
5 & = & 101_2 \\
\hline
 & & 111
\end{array}
$$

Nimm-Spiele

Die Gewinnstrategie

$$
\begin{array}{rcr}
2 & = & 010_2 \\
0 & = & 000_2 \\
5 & = & 101_2 \\
\hline
 & & 111
\end{array}
$$

Ohne die größte Zahl:

$$
\begin{array}{rcr}
2 & = & 10_2 \\
\hline
 & & 10
\end{array}
$$

Nimm-Spiele

Die Gewinnstrategie

$$\begin{array}{rcr} 2 & = & 010_2 \\ 0 & = & 000_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 111 \end{array}$$

Ohne die größte Zahl:

$$\begin{array}{rcr} 2 & = & 10_2 \\ \hline & & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 2 & = & 10_2 \\ 0 & = & 00_2 \\ 2 & = & 10_2 \\ \hline & & 20 \end{array}$$

Nimm-Spiele

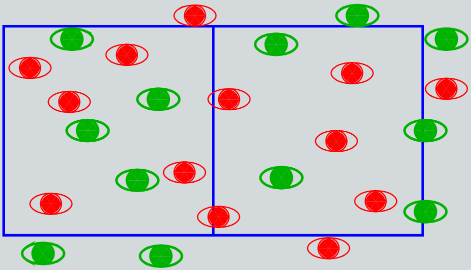
Die Gewinnstrategie

$$\begin{array}{rcr} 2 & = & 010_2 \\ 0 & = & 000_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ \hline & & 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 2 & = & 10_2 \\ 0 & = & 00_2 \\ \color{orange}{2} & = & 10_2 \\ \hline & & 20 \end{array}$$

Ungeordnete rote und grüne Hüte

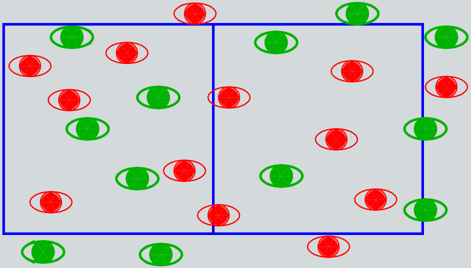
Strategie zur Lösung der Aufgabe gesucht:



Die Hutträger sollen sich nach Farbe getrennt in die beiden Felder begeben!

Ungeordnete rote und grüne Hüte

Strategie zur Lösung der Aufgabe gesucht:

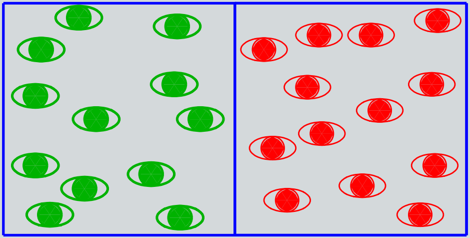


Die Hutträger sollen sich nach Farbe getrennt in die beiden Felder begeben!

Wieviele rote Hutträger sieht ein roter / grüner Hutträger?

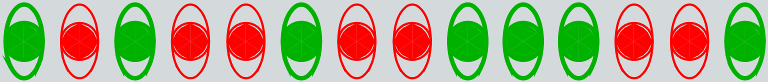
Ungeordnete rote und grüne Hüte

Lösung: Parität



Farbe des Huts erkennen

Strategie zur Lösung der Aufgabe gesucht:

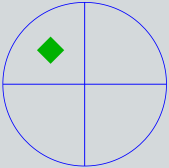


Jeder Hutträger sieht nur alle vor ihm stehenden Hutträger!

Jeder soll die Farbe seines Huts sagen – einer darf es falsch sagen!

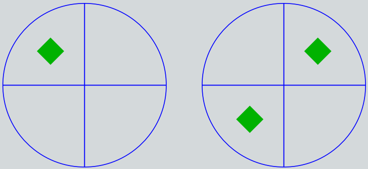
Mathematisches Roulette

Die Spielidee: Rouletteteller mit n Feldern, ein Feld belegt



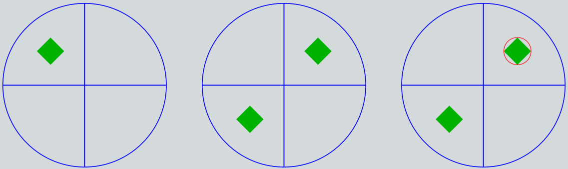
Mathematisches Roulette

Die Spielidee: Rouletteteller mit n Feldern, ein Feld belegt



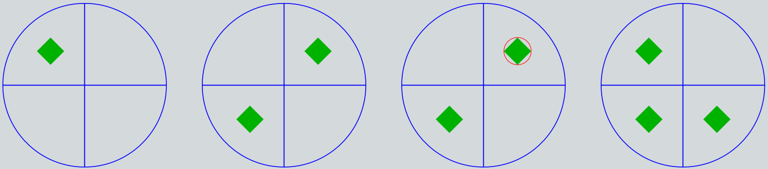
Mathematisches Roulette

Die Spielidee: Rouletteteller mit n Feldern, ein Feld belegt



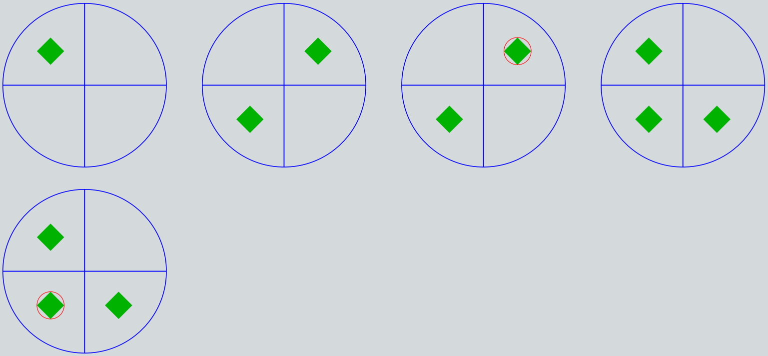
Mathematisches Roulette

Die Spielidee: Rouletteteller mit n Feldern, ein Feld belegt



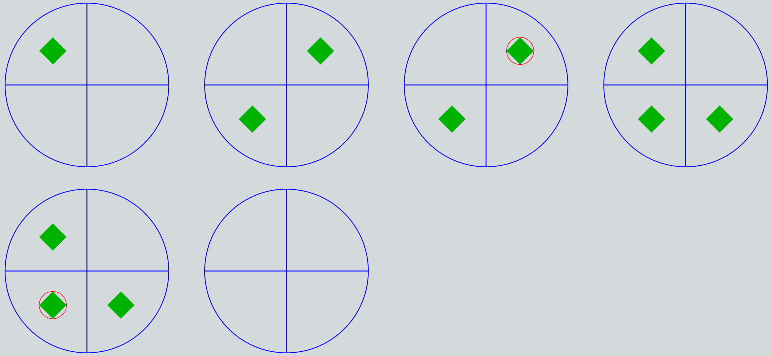
Mathematisches Roulette

Die Spielidee: Rouletteteller mit n Feldern, ein Feld belegt



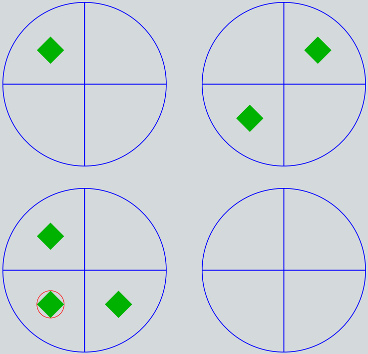
Mathematisches Roulette

Die Spielidee: Rouletteteller mit n Feldern, ein Feld belegt



Mathematisches Roulette

Die Spielidee: Rouletteteller mit n Feldern, ein Feld belegt



Für welches n kann man einen leeren Teller erhalten?

Blaue Augen

Bitte keine blauen Augen

Auf einer kleinen Insel ist ein altes Königreich beheimatet, dessen neuer König keine Untertanen mit blauen Augen will.
Eines Tages erblickt er bei der Inspektion seines Reiches einen blauäugigen Untertanen. Er erlässt sofort ein Dekret, dass jeder Untertan, der erkennt, dass er blaue Augen hat, die Insel in der nächsten Nacht verlassen muss.
Die Insel ist so klein, dass jeder Untertan jeden anderen jeden Tag sieht. Es gibt keine Spiegel in diesem Land und die Untertanen sind so erschrocken, dass sie nicht über dieses Thema reden.

Blaue Augen

Bitte keine blauen Augen

Auf einer kleinen Insel ist ein altes Königreich beheimatet, dessen neuer König keine Untertanen mit blauen Augen will.
Eines Tages erblickt er bei der Inspektion seines Reiches einen blauäugigen Untertanen. Er erlässt sofort ein Dekret, dass jeder Untertan, der erkennt, dass er blaue Augen hat, die Insel in der nächsten Nacht verlassen muss.
Die Insel ist so klein, dass jeder Untertan jeden anderen jeden Tag sieht. Es gibt keine Spiegel in diesem Land und die Untertanen sind so erschrocken, dass sie nicht über dieses Thema reden.
Lange passiert nichts, aber in der elften Nacht verlassen alle Blauäugigen die Insel. Wieviele waren es?.

Blaue Augen

Welchen Schluss ziehen Sie als Untertan dieses Königs,

- wenn sie am Ende des ersten Tages keinen Blauäugigen gesehen haben?
- wenn sie am Ende des ersten Tages einen Blauäugigen gesehen haben?
- wenn sie am Ende des ersten Tages einen Blauäugigen gesehen haben und er die Insel nicht in der ersten Nacht verlässt?
- ...

Blaue Augen

Welchen Schluss ziehen Sie als Untertan dieses Königs,

- wenn sie am Ende des ersten Tages keinen Blauäugigen gesehen haben?
- wenn sie am Ende des ersten Tages einen Blauäugigen gesehen haben?
- wenn sie am Ende des ersten Tages einen Blauäugigen gesehen haben und er die Insel nicht in der ersten Nacht verlässt?
- ...

Blaue Augen

Welchen Schluss ziehen Sie als Untertan dieses Königs,

- wenn sie am Ende des ersten Tages keinen Blauäugigen gesehen haben?
- wenn sie am Ende des ersten Tages einen Blauäugigen gesehen haben?
- wenn sie am Ende des ersten Tages einen Blauäugigen gesehen haben und er die Insel nicht in der ersten Nacht verlässt?
- ...

Blaue Augen

Welchen Schluss ziehen Sie als Untertan dieses Königs,

- wenn sie am Ende des ersten Tages keinen Blauäugigen gesehen haben?
- wenn sie am Ende des ersten Tages einen Blauäugigen gesehen haben?
- wenn sie am Ende des ersten Tages einen Blauäugigen gesehen haben und er die Insel nicht in der ersten Nacht verlässt?
- ...

Blaue Augen un mathematische Induktion

n Blauäugige verlassen die Insel in der n-ten Nacht!

- $n = 1$: Der einzige Blauäugige weiß am Ende des ersten Tags, dass er blaue Augen hat. ...
- Wenn Sie n Blauäugige sehen, erkennen Sie erschrocken am (n+1)-ten Tag, dass noch alle Blauäugigen auf der Inseln sind und sie müssen erkennen, dass alle Blauäugigen auch n Blauäugige gesehen haben. ...

Blaue Augen un mathematische Induktion

n Blauäugige verlassen die Insel in der n-ten Nacht!

- $n = 1$: Der einzige Blauäugige weiß am Ende des ersten Tags, dass er blaue Augen hat. ...
- Wenn Sie n Blauäugige sehen, erkennen Sie erschrocken am (n+1)-ten Tag, dass noch alle Blauäugigen auf der Inseln sind und sie müssen erkennen, dass alle Blauäugigen auch n Blauäugige gesehen haben. ...

Für den Nachhauseweg

Strategie gesucht: Indirekte Kommunikation

Wie kann eine Gruppe erfahren, ob alle Gruppenmitglieder in einem Kontrollraum waren?

Mit Mathematik gewinnen!

Ausarbeitung mit weiteren Spielen

www.kilsch.eu/Lehre: Arbeitsgebiete > Projekte, Vorträge > Spiele mit mathematischen Lösungen und Strategien

Mit Mathematik gewinnen!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Ausarbeitung mit weiteren Spielen

www.kilsch.eu/Lehre: Arbeitsgebiete > Projekte, Vorträge > Spiele mit mathematischen Lösungen und Strategien