Approximation durch Weibull-Verteilungen mit MatLab

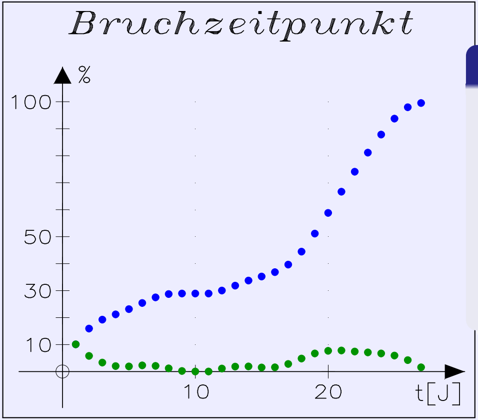
Modellierung der Haltbarkeit von Bauteilen

Dieter Kilsch

Fachhochschule Bingen, FB 2 • Technik, Informatik und Wirtschaft

GSE AG APL – APL Germany
Bingen, 16. April 2015

Haltbarkeit mechanischer Bauteile



„Übliche“ Lebensdauer

- In der Anfangszeit gehen mehr Bauteile kaputt.
- In der mittleren Lebensphase ist die Bruchquote gering.
- Gegen Ende der Lebendauer steigt die Bruchquote.

Warum MatLab ?

FH Bingen - Industrie

- Vorlesung „Informatik und Numerik“ im Maschinenbau-Studiengang
- Programmiersprache für Ingenieure
- Industrie setzt auf MatLab
- einige gute Sprachkonstrukte
- viele Werkzeugkästen

Warum MatLab ?

FH Bingen - Industrie

- Vorlesung „Informatik und Numerik“ im Maschinenbau-Studiengang
- Programmiersprache für Ingenieure
- Industrie setzt auf MatLab
- einige gute Sprachkonstrukte
- viele Werkzeugkästen

Warum MatLab ?

FH Bingen - Industrie

- Vorlesung „Informatik und Numerik“ im Maschinenbau-Studiengang
- Programmiersprache für Ingenieure
- Industrie setzt auf MatLab
- einige gute Sprachkonstrukte
- viele Werkzeugkästen

Warum MatLab ?

FH Bingen - Industrie

- Vorlesung „Informatik und Numerik“ im Maschinenbau-Studiengang
- Programmiersprache für Ingenieure
- Industrie setzt auf MatLab
- einige gute Sprachkonstrukte
- viele Werkzeugkästen

Warum MatLab ?

FH Bingen - Industrie

- Vorlesung „Informatik und Numerik“ im Maschinenbau-Studiengang
- Programmiersprache für Ingenieure
- Industrie setzt auf MatLab
- einige gute Sprachkonstrukte
- viele Werkzeugkästen

Warum MatLab ?

Kode-Beispiel

```
>> format compact
>> weibulld=@(x,k,l) (k/l)*(x/l)^(k-1)*exp(-(x/l)^k)
weibulld =
    @(x,k,l)(k/l)*(c/l)^(k-1)*exp(-(x/l)^k)
>> weibullv=@(x,k,l) 1-exp(-(x/l)^k)
weibullv =
    @(x,k,l)1-exp(-(x/l)^k)

>> hold on
>> fplot(@(x) weibulld(x,1,1),[0,6],'b')
>> fplot(@(x) weibulld(x,1,1),[0,6],'g')
>> fplot(@(x) weibulld(x,2,2),[0,6],'r')
>> fplot(@(x) weibulld(x,3,3),[0,6],'c')
>> fplot(@(x) weibulld(x,4,4),[0,6],'m')
>> fplot(@(x) weibulld(x,5,5),[0,6],'k')
>> hold off
```

Weibull-Dichte, Weibull-Verteilung

Definition und Satz (Gamma-Funktion)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

Es gelten

1. $\Gamma(1) = 1$,
2. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ *für* $x \geq 0$ *und*
3. $\Gamma(m) = (m-1)!$ *für* $m \in \mathbb{N}$.

Weibull-Dichte, Weibull-Verteilung

Definition (Weibull[1]-Wahrscheinlichkeitsdichte)

$$f(x,\lambda,k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}} & x \geq 0 \end{array} \right\}$$

λ: *charakteristische Lebensdauer*, k: *Ausfallsteilheit*

[1] Ernst Hjalmar Waloddi Weibull, schwedischer Mathematiker und Ingenieur, 1887 - 1979 (Annecy)

Weibull-Dichte, Weibull-Verteilung

Definition (Weibull[1]-Wahrscheinlichkeitsdichte)

$$f(x,\lambda,k) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} & x \geq 0 \end{cases}$$

Satz (Weibull-Wahrscheinlichkeitsverteilung)

$$P(x,\lambda,k) = \int_0^x f(t,\lambda,k)\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} .$$

$R(x,\lambda,k) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$ *gibt die „Überlebenswahrscheinlichkeit" an.*

Weibull-Dichte, Weibull-Verteilung

Definition (Weibull[1]-Wahrscheinlichkeitsdichte)

$$f(x,\lambda,k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} & x \geq 0 \end{array} \right\}$$

Satz (Weibull-Wahrscheinlichkeitsverteilung)

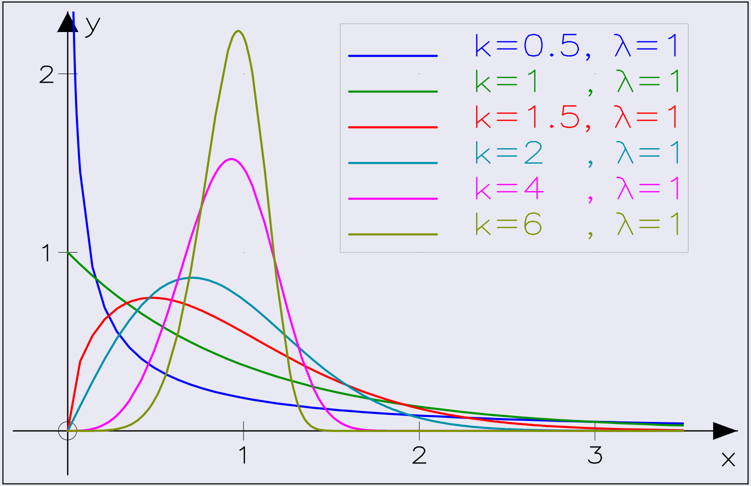
$$P(x,\lambda,k) = \int_0^x f(t,\lambda,k)\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} .$$

Satz ($f(x,\lambda,k)$ ist Wahrscheinlichkeitsdichte)

$$P(\infty,\lambda,k) = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{\infty}{\lambda}\right)^k} = 1$$

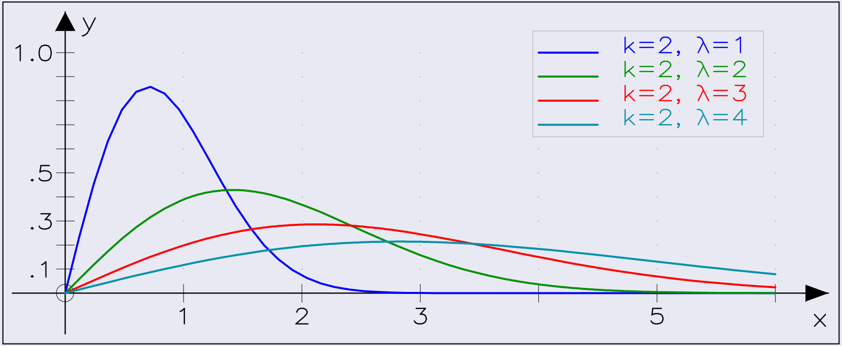
Weibull-Dichte, Weibull-Verteilung

Weibull-Dichte: k variiert



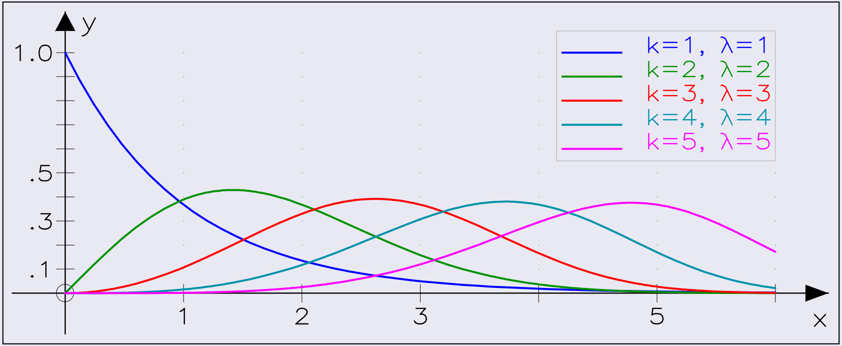
Weibull-Dichte, Weibull-Verteilung

Weibull-Dichte: λ variiert



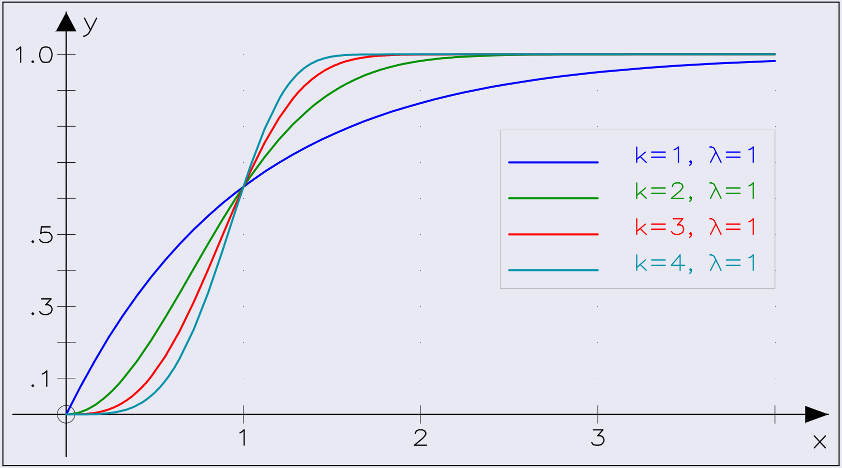
Weibull-Dichte, Weibull-Verteilung

Weibull-Dichte: λ variiert



Weibull-Dichte, Weibull-Verteilung

Weibull-Verteilung: k variiert



Weibull-Verteilung

Erwartungswert

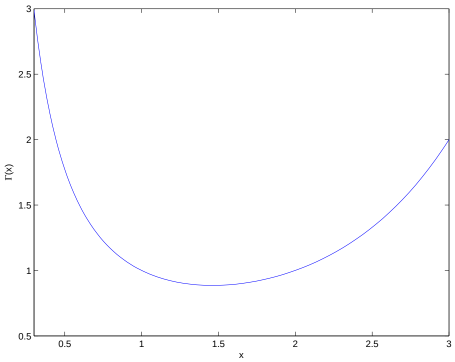
$$E(X) = \int_0^\infty t \cdot \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} \, \mathrm{d}t = \lambda \, \Gamma \left(1 + {}^1/_k\right)$$

Weibull-Verteilung

Erwartungswert

$$E(X) = \int_0^\infty t \cdot \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} \,\mathrm{d}t = \lambda \, \Gamma \left(1 + {}^1\!/_k\right)$$

$\Gamma(x)$:

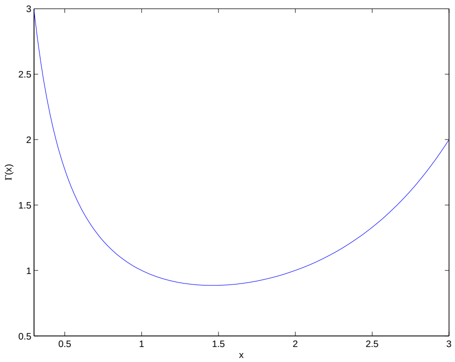


Weibull-Verteilung

Erwartungswert: streng monoton wachsend in k, λ.

$$E(X) = \int_0^\infty t \cdot \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} \mathrm{d}t = \lambda \Gamma\left(1 + {}^1\!/_k\right)$$

$\Gamma(x)$:

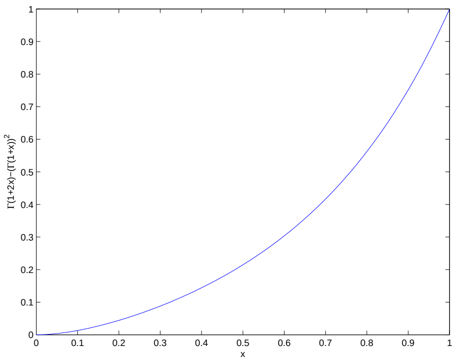


Weibull-Verteilung

Varianz

$$E((X - E(X))^2) = \lambda^2 \left(\Gamma\left(1 + {}^{2}\!/_{k}\right) - \left(\Gamma\left(1 + {}^{1}\!/_{k}\right)\right)^2 \right)$$

$\Gamma(1 + 2x) - (\Gamma(1 + x))^2$:

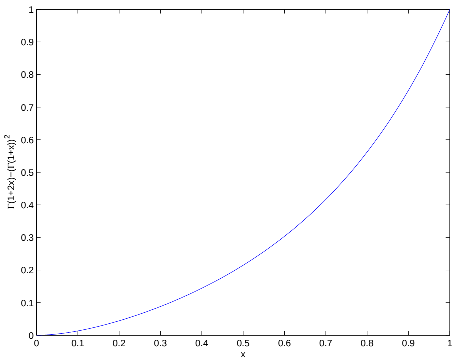


Weibull-Verteilung

Varianz: streng monoton wachsend in λ, fallend in k.

$$E((X - E(X))^2) = \lambda^2 \left(\Gamma\left(1 + {}^2/_k\right) - \left(\Gamma\left(1 + {}^1/_k\right)\right)^2\right)$$

$\Gamma(1 + 2x) - (\Gamma(1 + x))^2$:



Approximation mit einer Weibull-Verteilung

Aufgabe (Aufgabenstellung)

Liegt eine Messreihe $\{(x_i, P_i) | i = 1, \ldots, m\}$ *zu einer Weibull-verteilten Zufallsvariablen vor, so müssen die Parameter* λ *und* k *der besten approximierenden Funktion* $P(x, \lambda, k) = 1 - \mathrm{e}^{-\left(x/\lambda\right)^k}$ *gefunden werden.*

P_i ist der Anteil von Werkstücken, die bis zum Zeitpunkt x_i ausgefallen sind.

Approximation mit einer Weibull-Verteilung

Lösung (Ansatz)

$$
\begin{aligned}
& P = 1 - e^{-(x/\lambda)^k} \\
\iff \quad & 1 - P = e^{-(x/\lambda)^k} \\
\iff \quad & \ln(1 - P) = -(x/\lambda)^k \\
\iff \quad & -\ln(1 - P) = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k = \frac{1}{\lambda^k} \cdot x^k \\
\iff \quad & \ln(-\ln(1 - P)) = \ln\left(\frac{1}{\lambda^k}\right) + k \cdot \ln(x)
\end{aligned}
$$

Approximation durch eine Weibull-Verteilung

Lösung

$$\ln(-\ln(1-P)) = \ln\left(\frac{1}{\lambda^k}\right) + k \cdot \ln(x)$$

1. *Mathematik: Lineare Ausgleichsrechnung für $A\vec{z} = \vec{b}$:*
   - $A = (1, \ln(\vec{x}_i))$, $\vec{b} = \ln(-\ln(1-P_i))$
   - $(A^T A)\vec{z} = A^T\vec{b}$ *muss gelöst werden!*
   - $k = z(2)$, $\lambda = \sqrt[k]{e^{-z(1)}} = e^{-z(1)/k}$
2. APL:
   - `z←⍟(-⍟1-P)⌹1,,[1.5]x`
   - `(k l)←z[2],*-÷/z`
3. *MatLab:*
   - *z=[repmat(1,length(P),1),log(x)']\log(-log(1-P))';*
   - *kl=[z(2),exp(-z(1)/z(2))];*

Approximation durch eine Weibull-Verteilung

Lösung

$$\ln(-\ln(1-P)) = \ln\left(\frac{1}{\lambda^k}\right) + k \cdot \ln(x)$$

1. *Mathematik: Lineare Ausgleichsrechnung für $A\vec{z} = \vec{b}$:*
   - $A = (1, \ln(\vec{x}_i))$, $\vec{b} = \ln(-\ln(1-P_i))$
   - $(A^T A)\vec{z} = A^T \vec{b}$ *muss gelöst werden!*
   - $k = z(2)$, $\lambda = \sqrt[k]{e^{-z(1)}} = e^{-z(1)/k}$
2. `APL`*:*
   - `z←⍟(-⍟1-P)⌹1,,[1.5]x`
   - `(k l)←z[2],*-÷/z`
3. *MatLab:*
   - *z=[repmat(1,length(P),1),log(x)']\log(-log(1-P))';*
   - *kl=[z(2),exp(-z(1)/z(2))];*

Approximation durch eine Weibull-Verteilung

Lösung

$$\ln(-\ln(1-P)) = \ln\left(\frac{1}{\lambda^k}\right) + k \cdot \ln(x)$$

1. *Mathematik: Lineare Ausgleichsrechnung für $A\vec{z} = \vec{b}$:*
   - $A = (1, \ln(\vec{x}_i))$, $\vec{b} = \ln(-\ln(1-P_i))$
   - $(A^T A)\vec{z} = A^T\vec{b}$ *muss gelöst werden!*
   - $k = z(2)$, $\lambda = \sqrt[k]{e^{-z(1)}} = e^{-z(1)/k}$
2. APL:
   - `z←⍟(-⍟1-P)⌹1,,[1.5]x`
   - `(k l)←z[2],*-÷/z`
3. *MatLab:*
   - *z=[repmat(1,length(P),1),log(x)']\log(-log(1-P))';*
   - *kl=[z(2),exp(-z(1)/z(2))];*

Approximation durch eine Weibull-Verteilung

MatLab-Lösung

```
>> format compact
>> x=[1:12];
>> P=[0.075 0.204 0.357 0.481 0.667 0.774 0.883 0.902 0.948 0.968 0.995 0.999];
>> [kl,err,std]=WeibullOpt(x,P)
kl =
       1.7574       4.6423
err =
    0.0097185
std =
     0.018478
```

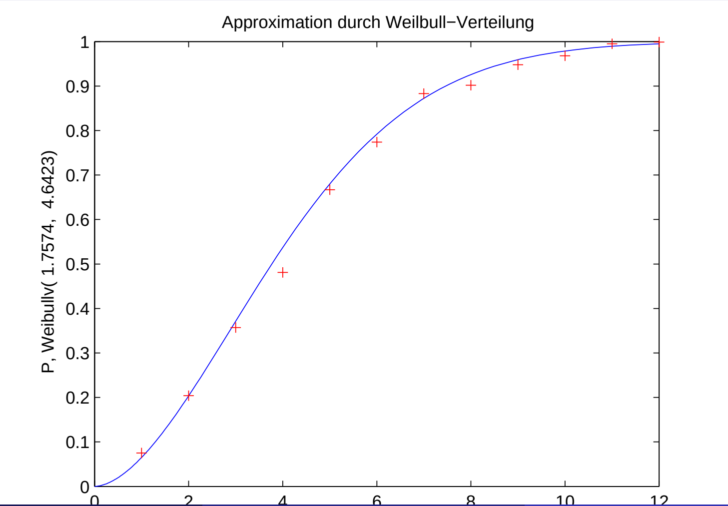
Approximation durch eine Weibull-Verteilung

MatLab-Lösung

```
function [kl,e,s]=WeibullOpt(x,P)
%==========================================================
Weibullv=@(x,kl) 1-exp(-(x/kl(2)).^kl(1));
%
A=[repmat(1,length(P),1),log(x)'];
z=A\log(-log(1-P))';
kl=[z(2),exp(-z(1)/z(2))];
%
z=Weibullv(x,kl)-P;                                  % Fehler
e=mean(z);
s=std(z);
%
fplot(@(x)Weibullv(x,kl),[0,max(x)]);
hold on;
plot(x,P,'+r');
xlabel('x')
ylabel(sprintf(['P, Weibullv(%7.4f,%8.4f)'],kl))
title('Approximation durch Weibull-Verteilung')
hold off;
```

Approximation durch eine Weibull-Verteilung

MatLab-Lösung



Approximation durch Weibull-Verteilungen

Überlagerung der Weibull-Dichten, $x \geq 0$

$$s(x, \lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) = a \cdot f(x, \lambda_1, k_1) + (1-a) \cdot f(x, \lambda_2, k_2)$$

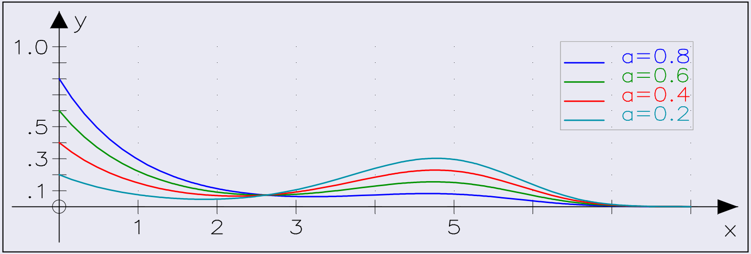
$$= a \left(\frac{k_1}{\lambda_1} \left(\frac{x}{\lambda_1} \right)^{k_1 - 1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \right) + (1-a) \left(\frac{k_2}{\lambda_2} \left(\frac{x}{\lambda_2} \right)^{k_2 - 1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda_2}\right)^{k_2}} \right)$$

Approximation durch Weibull-Verteilungen

Überlagerung der Weibull-Dichten, $x \geq 0$

$$s(x, \lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) = a \cdot f(x, \lambda_1, k_1) + (1 - a) \cdot f(x, \lambda_2, k_2)$$

Überlagerungen mit $k_1 = \lambda_1 = 1$ und $k_2 = \lambda_2 = 5$



Approximation durch Weibull-Verteilungen

Überlagerung der Weibull-Verteilungen, $x \geq 0$

$$P(x, \lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) = a \cdot P(x, \lambda_1, k_1) + (1 - a) \cdot P(x, \lambda_2, k_2)$$
$$= a \left(1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^{k_1}}\right) + (1 - a) \left(1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\lambda_2}\right)^{k_2}}\right)$$

Approximation durch Weibull-Verteilungen

Aufgabe

Für eine Messreihe $\{(x_i, P_i) | i = 1, \ldots, m\}$ *müssen die Koeffizienten* λ_1, λ_2, k_1, k_2 *und* a *so gefunden werden, dass sie den Fehler*

$$E(\lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} |P(x_i, \lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) - P_i|^2$$

minimieren.

Approximation durch Weibull-Verteilungen

Aufgabe

Für eine Messreihe $\{(x_i, P_i) | i = 1, \dots, m\}$ *müssen die Koeffizienten* λ_1, λ_2, k_1, k_2 *und* a *so gefunden werden, dass sie den Fehler*

$$E(\lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} |P(x_i, \lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) - P_i|^2$$

minimieren.

Verfahren

Es stehen zur Verfügung

- *Newton-Raphson- und Levenbergh-Marquardt-Verfahren,*
- *Gradientenabstiegsmethode (mit Momentum), Geradensuche mit und ohne Konjugiertenmethode.*

Approximation durch Weibull-Verteilungen

Aufgabe

Für eine Messreihe $\{(x_i, P_i) | i = 1, \ldots, m\}$ *müssen die Koeffizienten* λ_1, λ_2, k_1, k_2 *und* a *so gefunden werden, dass sie den Fehler*

$$E(\lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} |P(x_i, \lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2, a) - P_i|^2$$

minimieren.

Verfahren

Es stehen zur Verfügung

- *Newton-Raphson- und Levenbergh-Marquardt-Verfahren,*
- *Gradientenabstiegsmethode (mit Momentum), Geradensuche mit und ohne Konjugiertenmethode.*

Approximation durch Weibull-Verteilungen

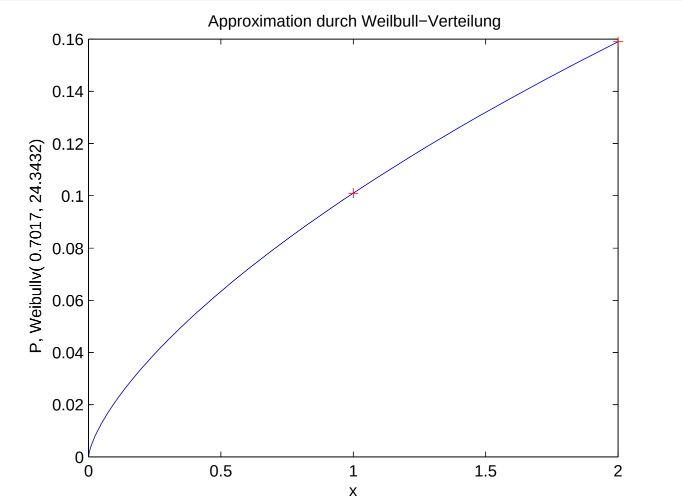
Die Geradensuche liefert

```
>> format compact
>> [param,mse,err,std,ergan]=WeibullOpt2('SkrStWe5.dat',2,7,.5,3,.01,1,.01,4000,20)
param =
      0.82986       3.1489       7.0846       22.064       0.31144
mse =
  4.3183e-005
err =
  -0.00027455
std =
    0.0066907
ergan =
            3         3386           13  9.8788e-006  4.1832e-006 -2.6455e-011
```

$$P(x) = 0.3114\left(1 - e^{-\left(\frac{x}{3.149}\right)^{0.8297}}\right) + 0.6886\left(1 - e^{-\left(\frac{x}{22.06}\right)^{7.085}}\right)$$

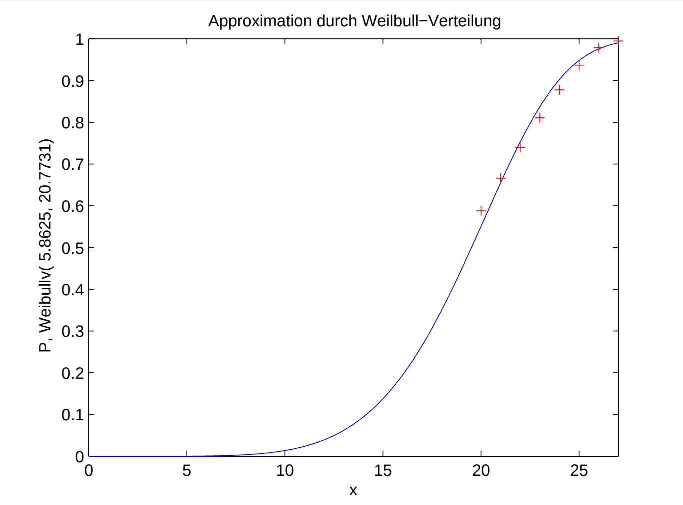
Approximation durch Weibull-Verteilungen

Anfangswerte Anfang



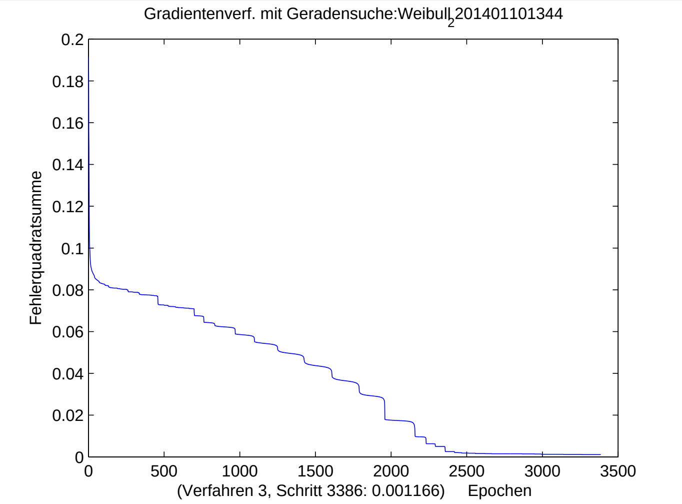
Approximation durch Weibull-Verteilungen

Anfangswerte Anfang



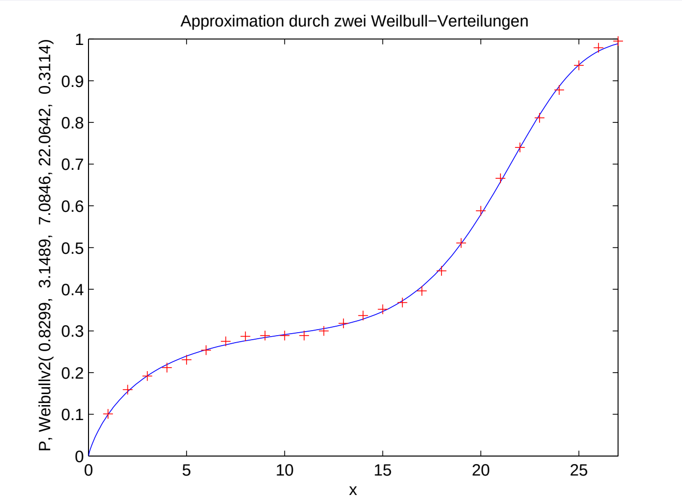
Approximation durch Weibull-Verteilungen

Anfangswerte Anfang



Approximation durch Weibull-Verteilungen

Anfangswerte Anfang



Approximation durch Weibull-Verteilungen

MatLab

Approximation der Weibull-Verteilung MatLab

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!