Quaternionen und Bilderkennung

Einführung und Identifizierung

Dieter Kilsch

eh. Technische Hochschule Bingen

APL Germany - GSE Working Group Germany,
Köln, 17. April 2018

Körper – und dann ?

Reelle und komplexe Zahlen und ?

$$\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ |\\ \mathbb{C}\\ |\\ \mathbb{R}\end{array}$$

- $\mathbb{R}$ ist topologisch vollständig (Kontinuum). $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung.
- $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen ist: Jedes Polynom hat eine Nullstelle. Es kann keine „kleinen“ Körper über $\mathbb{C}$ geben.
- Satz von Gelfand-Mazur: Alle endlich-dimensionalen Schiefkörper, die $\mathbb{R}$ enthalten, sind isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$: Schiefkörper der Quaternionen oder Hamiltonians (William Rowam Hamilton, ir. Mathematiker und Physiker, 1805 (Dublin) - 1865 (Dunsink bei Dublin)).

Körper – und dann ?

Reelle und komplexe Zahlen und ?

$$\begin{array}{c} \mathbb{H} \\ | \\ \mathbb{C} \\ | \\ \mathbb{R} \end{array}$$

- $\mathbb{R}$ ist topologisch vollständig (Kontinuum).
  $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung.
- $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen ist: Jedes Polynom hat eine Nullstelle. Es kann keine „kleinen“ Körper über $\mathbb{C}$ geben.
- Satz von Gelfand-Mazur: Alle endlich-dimensionalen Schiefkörper, die $\mathbb{R}$ enthalten, sind isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$: Schiefkörper der Quaternionen oder Hamiltonians (William Rowam Hamilton, ir. Mathematiker und Physiker, 1805 (Dublin) - 1865 (Dunsink bei Dublin)).

Körper – und dann ?

Reelle und komplexe Zahlen und ?

$$\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ |\\ \mathbb{C}\\ |\\ \mathbb{R}\end{array}$$

- $\mathbb{R}$ ist topologisch vollständig (Kontinuum).
  $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung.
- $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen ist: Jedes Polynom hat eine Nullstelle. Es kann keine „kleinen" Körper über $\mathbb{C}$ geben.
- Satz von Gelfand-Mazur: Alle endlich-dimensionalen Schiefkörper, die $\mathbb{R}$ enthalten, sind isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$: Schiefkörper der Quaternionen oder Hamiltonians (William Rowam Hamilton, ir. Mathematiker und Physiker, 1805 (Dublin) - 1865 (Dunsink bei Dublin)).

1. Einleitung

2. Quaternionen
    - Quaternion als komplexe Matrizen
    - Quaternionen als reeller Raum
    - Einheitsquaternionen und Drehungen im Imaginärteil

3. Quaternionen in der Bilderkennung

Schiefkörper $\mathbb{H}$ als komplexe Matrizen

$\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}^{2,2}$

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^{2,2} \\ | \\ \mathbb{C} \\ | \\ \mathbb{R} \end{array}$$

$\mathbb{C}^{2,2}$ zu groß: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Schiefkörper $\mathbb{H}$ als komplexe Matrizen

$\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}^{2,2}$

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^{2,2} \\ | \\ \mathbb{C} \\ | \\ \mathbb{R} \end{array}$$

Definition (Quaternionen)

$$\mathrm{h}_0 = \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{h}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &:= \{a\,\mathrm{h}_0 + b\,\mathrm{h}_1 + c\,\mathrm{h}_2 + d\,\mathrm{h}_3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a + b\,\mathrm{i} & c + d\,\mathrm{i} \\ -c + d\,\mathrm{i} & a - b\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v & w \\ -\overline{w} & \overline{v} \end{pmatrix} \middle|\, v, w \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

Schiefkörper $\mathbb{H}$ als komplexe Matrizen

Eigenschaften

1. $\mathbb{H}$ ist abgeschlossen unter Matrizenaddition und der -multiplikation, enthält die identische Matrix und ist somit ein Ring mit Eins.
2. ${h_1}^2 = {h_2}^2 = {h_3}^2 = -h_0$.
3. $h_1 h_2 = h_3,\ h_2 h_3 = h_1,\ h_3 h_1 = h_2$ und $h_2 h_1 = -h_3,\ h_3 h_2 = -h_1,\ h_1 h_3 = -h_2$.
4. Die Abbildung

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, +) & \to & (\mathbb{H}, +) \\ (a, b, c, d) & \mapsto & \begin{pmatrix} a + b\,i & c + d\,i \\ -c + d\,i & a - b\,i \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

ist verträglich mit der Vektoraddition / Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation. Folglich ist sie ein Vektorraumhomomorphismus, der bijektiv ist. Als ist Φ ein Vektorraumisomorphismus.

Schiefkörper $\mathbb{H}$ als komplexe Matrizen

Eigenschaften

1. $\mathbb{H}$ ist abgeschlossen unter Matrizenaddition und der -multiplikation, enthält die identische Matrix und ist somit ein Ring mit Eins.
2. ${h_1}^2 = {h_2}^2 = {h_3}^2 = -h_0$.
   Damit enthält $\mathbb{H}$ drei Kopien der komplexen Zahlen.
3. $h_1 h_2 = h_3, \; h_2 h_3 = h_1, \; h_3 h_1 = h_2$ und
   $h_2 h_1 = -h_3, \; h_3 h_2 = -h_1, \; h_1 h_3 = -h_2$.
4. Die Abbildung

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, +) & \to & (\mathbb{H}, +) \\ (a, b, c, d) & \mapsto & \begin{pmatrix} a + b\,i & c + d\,i \\ -c + d\,i & a - b\,i \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

   ist verträglich mit der Vektoraddition / Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation. Folglich ist sie ein Vektorraumhomomorphismus, der bijektiv ist. Als ist Φ ein Vektorraumisomorphismus.

Schiefkörper $\mathbb{H}$ als komplexe Matrizen

Eigenschaften

1. $\mathbb{H}$ ist abgeschlossen unter Matrizenaddition und der -multiplikation, enthält die identische Matrix und ist somit ein Ring mit Eins.
2. ${h_1}^2 = {h_2}^2 = {h_3}^2 = -h_0$.
3. $h_1\,h_2 = h_3,\ h_2\,h_3 = h_1,\ h_3\,h_1 = h_2$ und
   $h_2\,h_1 = -h_3,\ h_3\,h_2 = -h_1,\ h_1\,h_3 = -h_2$.
   Diese Regeln erinnern an die Rechenregeln des Kreuzproduktes in $\mathbb{R}^3$.
   Diese Multiplikation ist damit nicht kommutativ.
4. Die Abbildung

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, +) & \to & (\mathbb{H}, +) \\ (a, b, c, d) & \mapsto & \begin{pmatrix} a + b\,i & c + d\,i \\ -c + d\,i & a - b\,i \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

ist verträglich mit der Vektoraddition / Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation. Folglich ist sie ein Vektorraumhomomorphismus

Schiefkörper $\mathbb{H}$ als komplexe Matrizen

Eigenschaften

1. $\mathbb{H}$ ist abgeschlossen unter Matrizenaddition und der -multiplikation, enthält die identische Matrix und ist somit ein Ring mit Eins.
2. ${\mathrm{h}_1}^2 = {\mathrm{h}_2}^2 = {\mathrm{h}_3}^2 = -\mathrm{h}_0$.
3. $\mathrm{h}_1\,\mathrm{h}_2 = \mathrm{h}_3,\ \mathrm{h}_2\,\mathrm{h}_3 = \mathrm{h}_1,\ \mathrm{h}_3\,\mathrm{h}_1 = \mathrm{h}_2$ und
   $\mathrm{h}_2\,\mathrm{h}_1 = -\mathrm{h}_3,\ \mathrm{h}_3\,\mathrm{h}_2 = -\mathrm{h}_1,\ \mathrm{h}_1\,\mathrm{h}_3 = -\mathrm{h}_2$.
4. Die Abbildung

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, +) & \rightarrow & (\mathbb{H}, +) \\ (a, b, c, d) & \mapsto & \begin{pmatrix} a + b\,\mathrm{i} & c + d\,\mathrm{i} \\ -c + d\,\mathrm{i} & a - b\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

   ist verträglich mit der Vektoraddition / Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation. Folglich ist sie ein Vektorraumhomomorphismus, der bijektiv ist. Als ist Φ ein Vektorraumisomorphismus.

Schiefkörper $\mathbb{H}$ als komplexe Matrizen

Satz

$\mathbb{H}$ *ist ein Schiefkörper mit Zentrum* $\mathbb{R}\,\mathrm{h}_0$.

Beweis:

1. $$\begin{pmatrix} a+b\,\mathrm{i} & c+d\,\mathrm{i} \\ -c+d\,\mathrm{i} & a-b\,\mathrm{i} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix} a-b\,\mathrm{i} & -c-d\,\mathrm{i} \\ c-d\,\mathrm{i} & a+b\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} a_1+b_1\,\mathrm{i} & c_1+d_1\,\mathrm{i} \\ -c_1+d_1\,\mathrm{i} & a_1-b_1\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2+b_2\,\mathrm{i} & c_2+d_2\,\mathrm{i} \\ -c_2+d_2\,\mathrm{i} & a_2-b_2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)\,\mathrm{i} & a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2+(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)\,\mathrm{i} \\ -c_1a_2-d_1b_2-a_1c_2+b_1d_2+(-c_1b_2+d_1a_2+a_1d_2+b_1c_2)\,\mathrm{i} & -c_1c_2-d_1d_2+a_1a_2-b_1b_2+(-c_1d_2+d_1c_2-a_1b_2-b_1a_2)\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

3. Das Zentrum kann durch Nachrechnen verifiziert werden.

Schiefkörper $\mathbb{H}$ als komplexe Matrizen

Zusammenfassung

1. $$\left\{ \mathrm{h}_0 = \mathrm{Id},\ \mathrm{h}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\ \mathrm{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
   bildet eine reelle Basis von $\mathbb{H}$.
2. $\mathbb{H}$ *enthält mit* $\mathbb{R}(h_i)$, $(i, \ldots, 3)$ *drei Kopien der komplexen Zahlen, deren Schnitt* $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}(h_0)$ *das Zentrum von* $\mathbb{H}$ *ist.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{H} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{R}(h_1) \arrow[dr, dash] & \mathbb{C} \cong \mathbb{R}(h_2) \arrow[d, dash] & \mathbb{R}(h_3) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{R} \cong \mathbb{R}(h_0) &
\end{tikzcd}$$

Quaternionenschiefkörper $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$

Bemerkung

$(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *mit der Vektoraddition und der Multiplikation*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \widehat{=} \quad \begin{pmatrix} a_1 + b_1\,\mathrm{i} & c_1 + d_1\,\mathrm{i} \\ -c_1 + d_1\,\mathrm{i} & a_1 - b_1\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2\,\mathrm{i} & c_2 + d_2\,\mathrm{i} \\ -c_2 + d_2\,\mathrm{i} & a_2 - b_2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Quaternionenschiefkörper $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$

Bemerkung

$(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *mit der Vektoraddition und der Multiplikation*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \;\widehat{=}\; \begin{pmatrix} a_1 + b_1\,\mathrm{i} & c_1 + d_1\,\mathrm{i} \\ -c_1 + d_1\,\mathrm{i} & a_1 - b_1\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2\,\mathrm{i} & c_2 + d_2\,\mathrm{i} \\ -c_2 + d_2\,\mathrm{i} & a_2 - b_2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)\,\mathrm{i} & a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)\,\mathrm{i} \\ -c_1 a_2 - d_1 b_2 - a_1 c_2 + b_1 d_2 + (-c_1 b_2 + d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2)\,\mathrm{i} & -c_1 c_2 - d_1 d_2 + a_1 a_2 - b_1 b_2 + (-c_1 d_2 + d_1 c_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2)\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Quaternionenschiefkörper $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$

Bemerkung

$(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *mit der Vektoraddition und der Multiplikation*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} a_1 + b_1\,\mathrm{i} & c_1 + d_1\,\mathrm{i} \\ -c_1 + d_1\,\mathrm{i} & a_1 - b_1\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2\,\mathrm{i} & c_2 + d_2\,\mathrm{i} \\ -c_2 + d_2\,\mathrm{i} & a_2 - b_2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\widehat{=} \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 \\ a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2 \end{pmatrix}$$

Quaternionenschiefkörper $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$

Bemerkung

$(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *mit der Vektoraddition und der Multiplikation*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \widehat{=} \quad \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 \\ a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2 \end{pmatrix}$$

ist ein zu $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *isomorpher Schiefkörper, der ebenfalls mit* $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *bezeichnet wird. Die Inverse lautet*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix}$$

Funktionen in APL

Dyalog APL

```
r←a Hmul b
r←a[1]×b
r←r+a[2]×¯1 1 ¯1 1×b[2 1 4 3]
r←r+a[3]×¯1 1 1 ¯1×b[3 4 1 2]
r←r+a[4]×¯1 ¯1 1 1×⌽b

Hinv←{((1↑⍵),-1↓⍵)÷+/⍵×⍵}

Hdiv←{⍺ Hmul Hinv ⍵}

Hcon←{(1↑⍵),-1↓⍵}

HsDi←{(⍺ Hmul ⍵)-⍵ Hmul ⍺}
```

Funktionen in APL

Dyalog APL

```
r←a Hmul b
r←a[1]×b
r←r+a[2]×¯1 1 ¯1 1×b[2 1 4 3]
r←r+a[3]×¯1 1 1 ¯1×b[3 4 1 2]
r←r+a[4]×¯1 ¯1 1 1×⌽b

Hinv←{((1↑ω),-1↓ω)÷+/ω×ω}

Hdiv←{α Hmul Hinv ω}

Hcon←{(1↑ω),-1↓ω}

HsDi←{(α Hmul ω)-ω Hmul α}
```

```
      Hinv 0 0 1 1
0 0 ¯0.5 ¯0.5
      0 1 0 0 Hmul 0 0 1 0
0 0 0 1
      0 1 0 0 HsDi 0 0 1 0
0 0 0 2
```

Funktionen in APL

IBM APL2

```
r←a Hmul b
r←a[1]×b
r←r+a[2]×¯1 1 ¯1 1×b[2 1 4 3]
r←r+a[3]×¯1 1 1 ¯1×b[3 4 1 2]
r←r+a[4]×¯1 ¯1 1 1×⌽b

r←Hinv a
r←(a[1],−1↓a)÷+/a×a

r←a Hdiv b
r←a Hmul Hinv b

r←Hcon a
r←a[1],−1↓a

r←a HsDi b
r←(a Hmul b)−b Hmul a
```

Funktionen in APL

IBM APL2

```
r←a Hmul b
r←a[1]×b
r←r+a[2]×¯1 1 ¯1 1×b[2 1 4 3]
r←r+a[3]×¯1 1 1 ¯1×b[3 4 1 2]
r←r+a[4]×¯1 ¯1 1 1×⌽b

r←Hinv a
r←(a[1],-1↓a)÷+/a×a

r←a Hdiv b
r←a Hmul Hinv b

r←Hcon a
r←a[1],-1↓a

r←a HsDi b
r←(a Hmul b)-b Hmul a
```

```
      Hinv 0 0 1 1
0 0 ¯0.5 ¯0.5

      0 1 0 0 Hmul 0 0 1 0
0 0 0 1

      0 1 0 0 HsDi 0 0 1 0
0 0 0 2
```

Komplexe Konjugation und Norm

Definition (Konjugation, Norm)

1. *Die komplexe Konjugation* $^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *wird definiert durch*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a + b\,\mathrm{i} & c + d\,\mathrm{i} \\ -c + d\,\mathrm{i} & a - b\,\mathrm{i} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a - b\,\mathrm{i} & -c - d\,\mathrm{i} \\ c - d\,\mathrm{i} & a + b\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

   Sie ist ein additiver Automorphismus und ein multiplikativer Antiautomorphismus auf $\mathbb{H}$.

2. *Die Norm* $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *einer Quaternione ist*

$$N\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \begin{vmatrix} a + b\,\mathrm{i} & c + d\,\mathrm{i} \\ -c + d\,\mathrm{i} & a - b\,\mathrm{i} \end{vmatrix}.$$

Einheitsquaternionen

Bemerkung

Für $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ gilt $N(q_1 \cdot q_2) = N(q_1)N(q_2)$. N ist also ein Homomorphismus von $(\mathbb{H}, \cdot)$ auf $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$.

Beweis: $N(q_i) = det(q_i)$

Satz

Für $S := N^{-1}\{1\} = \{q \in \mathbb{H} \mid N(s) = 1\}$ gilt $S \cong \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$. S ist die Menge aller Einheitsquaternionen.

Einheitsquaternionen

Bemerkung

Für $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ *gilt* $N(q_1 \cdot q_2) = N(q_1)N(q_2)$. *N ist also ein Homomorphismus von* $(\mathbb{H}, \cdot)$ *auf* $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$.

Beweis: $N(q_i) = det(q_i)$

Satz

Für $S := N^{-1}\{1\} = \{q \in \mathbb{H} \mid N(s) = 1\}$ *gilt* $S \cong \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$. *S ist die Menge aller Einheitsquaternionen.*

Real - und Imaginärteil

Definition

Der Realteil einer Quaternione $a\,\mathrm{h}_0 + b\,\mathrm{h}_1 + c\,\mathrm{h}_2 + d\,\mathrm{h}_3$ *ist* a*, ihr Imaginärteil* $\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Bei der Zerlegung $\mathbb{H} = \mathrm{h}_0\,\mathbb{R} \oplus \mathrm{h}_1\,\mathbb{R} \oplus \mathrm{h}_2\,\mathbb{R} \oplus \mathrm{h}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R} \oplus V$ *bezeichnet* $V := \mathbb{R}^3$ *die Menge der Imaginärteile.*

Real - und Imaginärteil

Bemerkung (Multiplikation)

Für $a,\ a_i \in \mathbb{R}$ *und* $\vec{v},\ \vec{v}_i \in V(i = 1, 2)$ *gelten*

- $$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vec{v}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - \langle \vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \rangle \\ a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \end{pmatrix}.$$

  Die auf V eingeschränkte Multiplikation entspricht dem Kreuzprodukt.

Real - und Imaginärteil

Bemerkung (Multiplikation, Inverse)

Für $a,\ a_i \in \mathbb{R}$ *und* $\vec{v},\ \vec{v}_i \in V(i = 1,2)$ *gelten*

- $$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vec{v}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - \langle \vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \rangle \\ a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \end{pmatrix}.$$

  Die auf V *eingeschränkte Multiplikation entspricht dem Kreuzprodukt.*

- $$\begin{pmatrix} a \\ \vec{v} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + \|\vec{v}\|^2} \begin{pmatrix} a \\ -\vec{v} \end{pmatrix}$$

Real - und Imaginärteil

Bemerkung (Einheitsquaternionen)

Given a, $a_i \in \mathbb{R}$ *und* $\vec{v}$, $\vec{v}_i \in V(i = 1, 2)$ *gelten*

- $$S = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in [0, 2\pi) \wedge \hat{\omega} \in \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{v}\| = 1\} \right\}$$

  Diese Darstellung heißt Polardarstellung einer Einheitsquaternione.

Real - und Imaginärteil

Bemerkung (Einheitsquaternionen, Konjugieren)

Given $a,\ a_i \in \mathbb{R}$ *und* $\vec{v},\ \vec{v}_i \in V(i = 1, 2)$ *gelten*

- *Konjugieren mit Einheitsquaternionen liefert mit* $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix}^{-1} \\
= &\begin{pmatrix} 0 \\ (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\vec{v} + 2\,\langle \vec{\omega},\ \vec{v}\,\rangle\,\vec{\omega} + 2\cos(\alpha)\vec{\omega} \times \vec{v} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\alpha)\vec{v} + 2\sin^2(\alpha)\,\langle \hat{\omega},\ \vec{v}\,\rangle\,\hat{\omega} + \sin(2\alpha)\hat{\omega} \times \vec{v} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Real - und Imaginärteil

Bemerkung (Einheitsquaternionen, Konjugieren)

Given $a,\ a_i \in \mathbb{R}$ *und* $\vec{v},\ \vec{v}_i \in V(i = 1, 2)$ *gelten*

- *Zum Konjugieren mit der Einheitsquaternione* $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\hat{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

  gehört die Drehmatrix

$$D_{\omega,\alpha} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 & 2(\omega_x\omega_y - 2\omega_0\omega_z) & 2(\omega_0\omega_y + \omega_x\omega_z) \\ 2(\omega_0\omega_z + \omega_x\omega_y) & \omega_0^2 - \omega_x^2 + \omega_y^2 - \omega_z^2 & 2(\omega_y\omega_z - \omega_0\omega_x) \\ 2(\omega_x\omega_z - \omega_0\omega_y) & 2(\omega_0\omega_x + \omega_y\omega_z) & \omega_0^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2 + \omega_z^2 \end{pmatrix}.$$

  auf V.

Drehungen

Satz

Konjugieren mit einer Einheitsquaternione $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix}$ *bewirkt eine Drehung um die Achse* $\hat{\omega}$ *mit den Winkel* 2α.

```
      ,s←∊(2 1○○15÷180)×⍤1 (0 0 1)
0.9659258263 0 0 0.2588190451

      Hdrmat s
0.8660254038 ¯0.5          0
0.5           0.8660254038 0
0             0            1

      s Hdreh 0,v←1 2 3
0 ¯0.1339745962 2.232050808 3
      (Hdrmat s)+.×v
¯0.1339745962 2.232050808 3
```

Drehungen

Satz

Konjugieren mit einer Einheitsquaternione $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix}$ *bewirkt eine Drehung um die Achse* $\hat{\omega}$ *mit den Winkel* 2α.

```
      ,s←∊(2 1○○15÷180)×¨1 (0 0 1)
0.9659258263 0 0 0.2588190451

      Hdrmat s
0.8660254038 ¯0.5          0
0.5           0.8660254038 0
0             0            1

      s Hdreh 0,v←1 2 3
0 ¯0.1339745962 2.232050808 3
      (Hdrmat s)+.×v
¯0.1339745962 2.232050808 3
```

Drehungen

Satz

Konjugieren mit einer Einheitsquaternione $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix}$ *bewirkt eine Drehung um die Achse* $\hat{\omega}$ *mit den Winkel* 2α.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\,\hat{\omega} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\alpha)\vec{v} + 2\sin^2(\alpha)\,\langle \hat{\omega},\, \vec{v}\,\rangle\,\hat{\omega} + \sin(2\alpha)\hat{\omega} \times \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &\mapsto (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + 2\sin^2(\alpha))\hat{\omega} = \hat{\omega} \\ \hat{e} &\mapsto \cos(2\alpha)\hat{e} + \sin(2\alpha)\hat{\omega} \times \hat{e} \\ \hat{\omega} \times \hat{e} &\mapsto \cos(2\alpha)\hat{\omega} \times \hat{e} + \sin(2\alpha)\hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \hat{e}) \\ &= \cos(2\alpha)\hat{\omega} \times \hat{e} - \sin(2\alpha)\hat{e} \end{aligned}$$

Drehungen

Satz

Für $\tau : \left\{ \begin{array}{lcc} S & \to & \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \\ s & \mapsto & \tau(s) : \left\{ \begin{array}{lcc} V & \to & V \\ v & \mapsto & svs^{-1} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ *gelten:*

1. $\tau(s)$ *ist eine spezielle orthogonale Abb. des Vektorraums* V *in sich.*
2. τ *ist ein Epimorphismus mit*
   $\ker \tau = \langle -\mathrm{h}_0 \rangle = \{\mathrm{h}_0, -\mathrm{h}_0\} = S \cap Z(\mathbb{H})$.

Drehungen

Satz

Für $$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \to & \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \\ s & \mapsto & \tau(s) : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ v & \mapsto & svs^{-1} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$ *gelten:*

1. $\tau(s)$ *ist eine spezielle orthogonale Abb. des Vektorraums V in sich.*
2. τ *ist ein Epimorphismus mit* $\ker\tau = \langle -\mathrm{h}_0 \rangle = \{\mathrm{h}_0, -\mathrm{h}_0\} = S \cap Z(\mathbb{H})$.

Zusammenfassung

$$S/_{\{\pm 1\}} \cong \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})/_{\{\pm \mathrm{Id}\}} \cong \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$$

Bilderkennung

Rechenaufwand: Anzahl Multiplikationen

1. Anwendung einer Matrix auf einen Vektor: 9 Multiplikation.
2. Einheitsquaternione angewandt auf rein imaginären Vektor durch Konjugieren: 18 Multiplikation.
3. Multiplikation zweier Matrizen: 27 Multiplikationen.
4. Multiplikation zweier Einheitsquaternionen: 16 Multiplikationen.
5. Berechnung der Drehmatrix aus einer Einheitsquaternione: 10 Multiplikationen.

Vgl. Wikipedia, Quaternionen.

Bilderkennung

Rechenaufwand: Anzahl Multiplikationen

1. Anwendung einer Matrix auf einen Vektor: 9 Multiplikation.
2. Einheitsquaternione angewandt auf rein imaginären Vektor durch Konjugieren: 18 Multiplikation.
3. Multiplikation zweier Matrizen: 27 Multiplikationen.
4. Multiplikation zweier Einheitsquaternionen: 16 Multiplikationen.
5. Berechnung der Drehmatrix aus einer Einheitsquaternione: 10 Multiplikationen.

Vgl. Wikipedia, Quaternionen.

Bilderkennung

Rechenaufwand: Anzahl Multiplikationen

1. Anwendung einer Matrix auf einen Vektor: 9 Multiplikation.
2. Einheitsquaternione angewandt auf rein imaginären Vektor durch Konjugieren: 18 Multiplikation.
3. Multiplikation zweier Matrizen: 27 Multiplikationen.
4. Multiplikation zweier Einheitsquaternionen: 16 Multiplikationen.
5. Berechnung der Drehmatrix aus einer Einheitsquaternione: 10 Multiplikationen.

Vgl. Wikipedia, Quaternionen.

Bilderkennung

Rechenaufwand: Anzahl Multiplikationen

1. Anwendung einer Matrix auf einen Vektor: 9 Multiplikation.
2. Einheitsquaternione angewandt auf rein imaginären Vektor durch Konjugieren: 18 Multiplikation.
3. Multiplikation zweier Matrizen: 27 Multiplikationen.
4. Multiplikation zweier Einheitsquaternionen: 16 Multiplikationen.
5. Berechnung der Drehmatrix aus einer Einheitsquaternione: 10 Multiplikationen.

Vgl. Wikipedia, Quaternionen.

Bilderkennung

Rechenaufwand: Anzahl Multiplikationen

1. Anwendung einer Matrix auf einen Vektor: 9 Multiplikation.
2. Einheitsquaternione angewandt auf rein imaginären Vektor durch Konjugieren: 18 Multiplikation.
3. Multiplikation zweier Matrizen: 27 Multiplikationen.
4. Multiplikation zweier Einheitsquaternionen: 16 Multiplikationen.
5. Berechnung der Drehmatrix aus einer Einheitsquaternione: 10 Multiplikationen.

Vgl. Wikipedia, Quaternionen.

Bilderkennung

Aufgabe (Drehung bestimmen)

Welche Drehung dreht ein Modellobjekt $\{\vec{m}_i \mid i = 1, \dots, n\}$ *auf das Szenenobjekt* $\{\vec{s}_i \mid i = 1, \dots, n\}$ *?*
Durch Translation kann erreicht werden, dass ein Punkt des Modells mit einem Punkt der Szene übereinstimmt. Dieser Punkt wird als Ursprung der Drehung gewählt. Gesucht ist jetzt die Drehung D, die den Fehler

$$E(D) = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2$$

minimiert.

Bilderkennung

Formulierung mit Einheitsquaternionen $q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$E(D) = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2$$

Bilderkennung

Formulierung mit Einheitsquaternionen $q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$E(D) = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2 \cdot 1$$

Bilderkennung

Formulierung mit Einheitsquaternionen $q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$E(D) = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - q\vec{m}_i q^{-1}\|^2 \cdot \|q^2\| \qquad (1)$$

(1): $\|q^2\| = 1$

Bilderkennung

Formulierung mit Einheitsquaternionen $q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} E(D) &= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - q\vec{m}_i q^{-1}\|^2 \cdot \|q^2\| \qquad (1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i q - q\vec{m}_i\|^2 \end{aligned}$$

(1): $\|q^2\| = 1$

Bilderkennung

Formulierung mit Einheitsquaternionen $q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$E(D) = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - q\vec{m}_i q^{-1}\|^2 \cdot \|q^2\| \quad (1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i q - q\vec{m}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|A_i\vec{q}\,\|^2 \quad (2)$$

(1): $\|q^2\| = 1$

(2): $q \mapsto \vec{s}_i q - q\vec{m}_i$ ist $\mathbb{R}$-linear $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ in q: $A_i \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$.

Bilderkennung

Formulierung mit Einheitsquaternionen $q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
E(D) &= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - q\vec{m}_i q^{-1}\|^2 \cdot \|q^2\| && (1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i q - q\vec{m}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|A_i\vec{q}\,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}^{\,t} A_i^t A_i \vec{q} && (2)
\end{aligned}
$$

(1): $\|q^2\| = 1$

(2): $q \mapsto \vec{s}_i q - q\vec{m}_i$ ist $\mathbb{R}$-linear $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ in q: $A_i \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$.

Bilderkennung

Formulierung mit Einheitsquaternionen $q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} E(D) &= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - q\vec{m}_i q^{-1}\|^2 \cdot \|q^2\| && (1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i q - q\vec{m}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|A_i\vec{q}\,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}^{\,t} A_i^t A_i \vec{q} && (2) \\ &= \vec{q}^{\,t} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^t A_i \right) \vec{q} \end{aligned}$$

(1): $\|q^2\| = 1$

(2): $q \mapsto \vec{s}_i q - q\vec{m}_i$ ist $\mathbb{R}$-linear $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ in q: $A_i \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$.

Bilderkennung

Formulierung mit Einheitsquaternionen $q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\omega} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
E(D) &= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - D\vec{m}_i\|^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i - q\vec{m}_i q^{-1}\|^2 \cdot \|q^2\| && (1)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \|\vec{s}_i q - q\vec{m}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|A_i\vec{q}\,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}^{\,t} A_i^t A_i \vec{q} && (2)\\
&= \vec{q}^{\,t}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i^t A_i\right)\vec{q} = \vec{q}^{\,t} \cdot B \cdot \vec{q} && (3)
\end{aligned}
$$

(1): $\|q^2\| = 1$

(2): $q \mapsto \vec{s}_i q - q\vec{m}_i$ ist $\mathbb{R}$-linear $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ in q: $A_i \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$.

(3): B ist symmetrisch.

Bilderkennung

$$\vec{q}^{\,t} \cdot B \cdot \vec{q} = \langle \vec{q}, B\vec{q} \rangle = \left\langle \vec{q}, \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^t A_i \right) \vec{q} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{q}, A_i^t A_i \vec{q} \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle A_i \vec{q}, A_i \vec{q} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \| A_i \vec{q} \|^2$$

ist semi-definit. Der Eigenvektor zum kleinsten nicht-negativen Eigenwert minimiert den Fehler.

Bilderkennung

$$\vec{q}^{\,t} \cdot B \cdot \vec{q} = \langle \vec{q},\, B\vec{q}\,\rangle = \left\langle \vec{q},\, \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^t A_i\right) \vec{q}\, \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{q},\, A_i^t A_i \vec{q}\,\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle A_i\vec{q},\, A_i\vec{q}\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|A_i\vec{q}\|^2$$

ist semi-definit. Der Eigenvektor zum kleinsten nicht-negativen Eigenwert minimiert den Fehler.

Verfahren

Für $A_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & \vec{s}_i q - q\vec{m}_i \end{array} \right\} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ *und* $B = \sum_{i=1}^{n} A_i^t A_i$ *minimiert die Matrix* D *zum Einheitseigenvektor* $\vec{q}$ *mit dem kleinsten Eigenwert der Matrix* B *den Fehler* $E(D)$. *Der kleinste Eigenwert und der dazugehörende Eigenvektor können durch das Verfahren von Mises und die Wielandt-Iteration berechnet werden.*

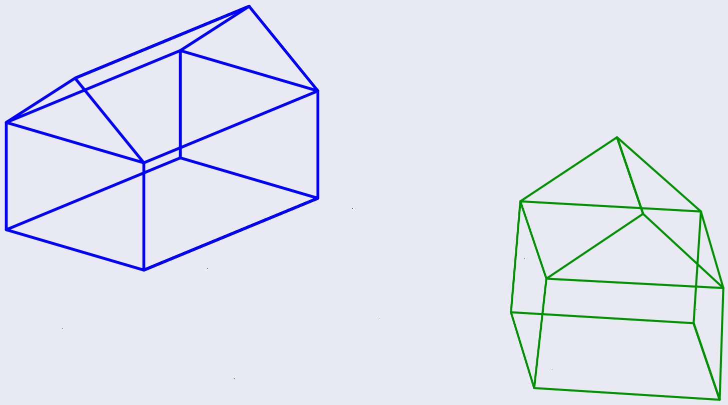
Modell und Szene

Modell, Szene

```
mo←4 3⍴0 0 0 12 0 0 12 8 0 0 8 0
mo←mo,[1]0 0 5+[2]mo
mo←mo,[1]2 3⍴0 4 8 12 4 8
s←mo+.×1 Drm3 ¯45 4 5
s←(0.99+(⍴s)⍴0.02×∊((⍴,s)⍴1)?¨2)×s
sc←14 31 4+[2]s
```

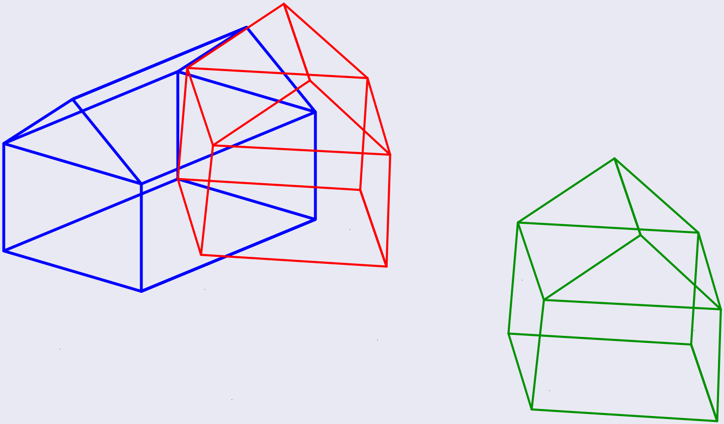
Modell und Szene

Modell, Szene



Modell und Szene

Modell, Szene, Translation der Szene



Modell und Szene

Verfahren

Für $A_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & \vec{s}_i q - q\vec{m}_i \end{array} \right\} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ *und* $B = \sum_{i=1}^{n} A_i^t A_i$ *minimiert die Matrix* D *zum Einheitseigenvektor* $\vec{q}$ *mit dem kleinsten Eigenwert der Matrix* B *den Fehler* $E(D)$. *Der kleinste Eigenwert und der dazugehörende Eigenvektor können durch das Verfahren von Mises und die Wielandt-Iteration berechnet werden.*

Berechnung

Modell und Szene

Verfahren

Für $A_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & \vec{s}_i q - q\vec{m}_i \end{array} \right\} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ *und* $B = \sum_{i=1}^{n} A_i^t A_i$ *minimiert die Matrix* D *zum Einheitseigenvektor* $\vec{q}$ *mit dem kleinsten Eigenwert der Matrix* B *den Fehler* $E(D)$*. Der kleinste Eigenwert und der dazugehörende Eigenvektor können durch das Verfahren von Mises und die Wielandt-Iteration berechnet werden.*

Berechnung

```
      q←⊂[2]4 4⍴5↑1
      A←⍉¨⊃¨⊂[2]((⊂[2]0,s)∘.Hmul q)-⍉q∘.Hmul⊂[2]0,mo
      ,(w e)←Wiela1 B←⊃+/(⍉¨A)+.רA
0.4749283006     0.9226059704
                ¯0.02755600419
                ¯0.04835511334
                 0.3817075752
```

Modell und Szene

Berechnung von Mises Algorithmus

```
r←Mises1 mat
x←(↑⍴mat)↑1

DO:
x←mat+.×xalt←x
x←x÷(+/x×x)*0.5
→((⌈/|x-xalt)>1E¯8)/DO

r←((mat+.×x)⌹x)(,[1.5]x)
```

Modell und Szene

Berechnung Wielandts Algorithmus

```
r←Wiela1 mat
x←(↑⍴mat)↑1

DO:
x←(xalt←x)⌹mat
x←x÷(+/x×x)*0.5
→((⌈/|x-xalt)>1E¯8)/DO

r←((mat+.×x)⌹x)(,[1.5]x)
```

Modell und Szene

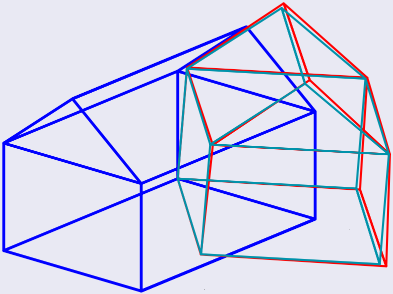
Berechnung Wielandts Algorithmus

```
      q←⊂[2]4 4⍴5↑1
      A←⍉¨⊃¨⊂[2]((⊂[2]0,s)∘.Hmul q)-⍉q∘.Hmul⊂[2]0,mo
      ,(w e)←Wiela1 B←⊃+/(⍉¨A)+.×¨A
 0.4749283006     0.9226059704
                 ¯0.02755600419
                 ¯0.04835511334
                  0.3817075752

      (s-⊃(⊂Hdrmat,e)+.×¨⊂[2]mo)÷s
1                1               1
0.01195321674    0.02690747054   0.05094570483
0.02025259723    0.009462197457  0.1873015667
0.02697763674    0.01218516893   0.0005827847932
0.0335428643   ¯0.08286290679   0.00986244847
0.01178156164    0.02610348703   0.03224123759
0.04065164481    0.02820517393   0.01477831918
0.008312330371   0.01091595672   0.01137495259
0.009319165317   0.02747665199   0.01028882928
0.03313149529    0.007787749596  0.01245741103
```

Modell und Szene

Erkennen



Literatur

Huppert, B. und W. Willems. Lineare Algebra. Teubner, 2006.

Jung, X. und H. Bunke. Dreidimensionales Computersehen. Gewinnung und Analyse von Tiefenbildern. Berlin: Springer, 1997.

Mathepedia. Quaternionen. http://http://www.mathepedia.de/Quaternionen.html (besucht 30. 01. 2018).

Robinson, D. J. Abstract Algebra: An Introduction with Applications. 2nd ed. De Gruyter Textbook. Berlin: Walter de Gruyter, 2015.

Wikipedia. Quaternionen. http://https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion (besucht 30. 01. 2018).