APL-Journal

A Programming Language

2/2002

APL-Germany e.V.
Jahrgang 21 Nr. 2 2002
ISSN - 1438-4531
RHOMBOS-VERLAG

In dieser Ausgabe:

Reiner Nußbaum
Automation für Linux und Unix: gift-ALU

David Liebtag
APL2 Gui-Tools

Werner Schäfer
Näherungslösung für Randbedingungen

Im Blickpunkt

Walter Schleinitz
Symmetrie in der Musik

Inhaltsverzeichnis

Reiner Nußbaum
Automation für Linux und Unix (gift-ALU) 4

David Liebtag
APL2 Gui-Tools (Paper from the GSE and APL-Germany Meeting 2002) 8

Werner Schäfer
Lösung von Randwertproblemen 11

Walter Schleinitz
Symmetrie in der Musik 33

Aufnahmeformular 36

Impressum 2

Editorial 3

Vorschau

Im nächsten APL-Journal lesen Sie unter anderem:

Advanced Encryption Standard
von Dr. Herbert Voß

Eine Entwicklungsumgebung für IBM APL2 in einem allgemeinen Automationskonzept
von Dr. Reiner Nußbaum

Storing APL Objects Outside the Workspace
von Nancy Wheeler

R versus APL
von M. Barghoorn und J. Schweiger

4 Automation für Linux und Unix (gift-ALU)

Mit dem Verzeichniskonzept und dem Automationsprogramm „gift-ALU“ ist es möglich, individuelle Verarbeitungsanforderungen für Benutzer in einer Verzeichnisstruktur so zu hinterlegen, daß bekannt ist, was zu tun ist (Anwendung: Filetransfer, Komprimieren/Dekomprimieren, toPDF Transformation, Bildverarbeitung,...), für wen etwas zu tun ist (Trennung der Datenbereiche in verschiedene Benutzer/Mandanten) und wie etwas zu tun ist (welche Parameter der Anwendung mitzugeben sind –Bild rechts drehen-). Für die konkrete Verarbeitung reichen Benutzerdaten an der richtigen Stelle aus (=womit ist etwas zu tun). Die benutzerbezogene Verarbeitung läuft in einer Subtask, der über ein standardisiertes Umfeld alle erforderlichen Informationen mitgegeben werden. Die benutzerbezogene Verarbeitung muß somit nur ein einzelnes Problem lösen.Aufgrund des Verzeichniskonzeptes kann die Automation für Anwendungen oder Anwendungsgruppen parallel und unabhängig voneinander verfügbar sein. Soweit die Anwendung dies zuläßt, kann darüber hinaus die benutzerbezogene Verarbeitung von mehreren Dateien parallel erfolgen (gleichzeitiger Versand von Dateien mit ftp).

8 APL2 Gui-Tools

David Liebtag präsentiert die neuen Gui-Tools von APL2. Vorgestellt werden die neuesten Funktionen, aktuelle Erweiterungen und Korrekturen früherer Versionen.

11 Lösung von Randwertproblemen

Ein Beitrag zur Verbesserung der Genauigkeit bei der numerischen Lösung von linearen Differentialgleichungen unter Verwendung von z.B. biharmonischen Polynomen mit oder ohne Zuhilfenahme der Methode der finiten Elemente (FE), aufgezeigt an der Lösung der Plattengleichung: $B \cdot \Delta\Delta\, w(x, y) = p(x, y)$.

33 Symmetrie in der Musik

Walter Schleinitz erinnert in seinem Beitrag daran, dass Mathematik auch in einfachen musikalischen Gebilden waltet. Ausführlich arbeitet der Autor anhand von unterschiedlichen Symmetriebetrachtungen die Zusammenhänge von Musik und Mathematik heraus.

Impressum APL - Journal ISSN 1438-4531

Herausgeber: Dipl.-Math. Dieter Lattermann, Walldorf

Redaktion: Dipl.-Volksw. Martin Barghoorn (verantwortlich)
Technische Universität Berlin
Franklinstr. 28
D-10587 Berlin
Tel. (030) 314 24392
Fax (030) 314 25901
eMail: barg@cs.tu-berlin.de

Erscheinungsweise: halbjährlich

Erscheinungsort: Berlin

Verlag: RHOMBOS-VERLAG, Berlin
Kurfürstenstr. 17
D-10785 Berlin
Tel. (030) 261 9461
Fax (030) 261 6300
eMail: verlag@rhombos.de,
Internet: www.rhombos.de

Gestaltung: RHOMBOS-VERLAG, Berlin

Druck: dbusiness.de GmbH, Berlin

Copyright: *APL Germany e.V.*
(für alle Beiträge, die als Erstveröffentlichung erscheinen)

Homepage des APL-Germany e.V.: http://www.apl-germany.de
FTP-Server zum Datei-Upload: ftp.cs.tu-berlin.de/pub/lang/apl/stat/incoming.
Homepage des APL-Journals beim Verlag: http://www.rhombos.de/apljourn.htm

Eine Haftung für die Richtigkeit der Veröffentlichungen kann trotz sorgfältiger Prüfung von Redaktion und Herausgeber nicht übernommen werden. Sämtliche Veröffentlichungen im APL-Journal erfolgen ohne Berücksichtigung eines eventuellen Patentschutzes. Warennamen werden ohne Gewährleistung einer freien Verwendung benutzt.

Mit Namen gekennzeichnete Artikel geben nicht unbedingt die Meinung des Herausgebers oder der Redaktion wieder. Für unverlangte Einsendungen wird keine Haftung übernommen. Nachdruck ist nur mit Zustimmung des Herausgebers sowie mit Quellenangabe und Einsendung eines Beleges gestattet. Überarbeitungen eingesandter Manuskripte liegen im Ermessen der Redaktion.

Wie immer freuen wir uns auf Ihr Feedback zu diesem Heft. Schreiben Sie uns an barg@cs.tu-berlin.de, oder faxen Sie an: 030 - 314 25901.

Technische Hinweise für Autorinnen und Autoren

Manuskripte werden von der Redaktion entgegengenommen. Sie müssen im Besitz der Nutzungsrechte für die von Ihnen eingereichten Texte, Fotos und Zeichnungen sein. Die Zustimmung zum Abdruck wird vorausgesetzt.

Manuskripte und Beiträge aller Art werden in jeder Form entgegengenommen. Es werden jedoch Beiträge in gespeicherter Form bevorzugt. Bitte speichern Sie Ihren Text im Format Ihrer Textverarbeitung und zusätzlich als RTF-Datei (Rich Text Format). Sie brauchen sich nicht die Mühe machen, Ihren Text aufwendig zu formatieren. Auszeichnungen im Text sollten sich auf „Kursiv“ beschränken. Ihre Datei schicken Sie der Redaktion bitte auf einem Datenträger (Diskette oder CD-ROM). Alternativ hierzu können Sie der Redaktion Ihre Daten auch per Email (barg@cs.tu-berlin.de) oder auch zum FTP-Server der Technischen Universität Berlin schicken. Die Adresse lautet: ftp.cs.tu-berlin.de/pub/lang/apl/stat/incoming.

Auch ein komfortables FTP-Transferprogramm für Windows gibt es beim ftp-Server des Fachbereichs Informatik der TUB unter: ftp.cs.tu-berlin.de/pub/lang/apl/bin/

Wenn Sie Ihr Manuskript einreichen, sollten Sie zusätzlich eine Gliederung und Zusammenfassung Ihrer Arbeit vorlegen. In der Zusammenfassung sollte in wenigen Sätzen die wichtigste Aussage Ihres Textes wiedergegeben sein.

Grafiken

Bitte senden Sie uns einen sauberen Ausdruck der Graphiken auf rein-weißem Papier. Linien (keine Haarlinien!) in den Graphiken sollten Schriften so groß gewählt sein, dass sie auch bei (stark) verkleinerter Wiedergabe im Heft noch zu erkennen sind; auf der Rückseite vermerken Sie bitte Ihren Namen und die Nummer der Abbildung; Zusätzlich wäre es schön, wenn Sie uns die mit einem gängigen Vektor-Grafikprogramm erstellten Zeichnungen und Grafiken auch als Datei liefern. Grafikdateien (Strichzeichnungen) sollten möglichst im Austauschformat EPS (skalierbar) mit 300 bis 600 dpi Auflösung in schwarz-weiß bzw. Graustufe abgespeichert werden. Nach Rücksprache können sie zusätzlich Ihre Grafiken in Ihrem Original-Dateiformat liefern oder in ihr Textdokument einbetten.

Digitale Fotos benötigen wir im TIF-Format mit einer maximalen Auflösung von 250 dpi. Nicht geeignet sind Abbildungen und Fotos, wenn Sie aus dem Internet stammen beziehungsweise im Original als Bildschirmdarstellung (Auflösung 75 - 150 dpi) vorliegen. Ebenfalls nicht geeignet sind Grafiken, die mit einem pixelorientierten Zeichenprogramm erstellt wurden.

EDITORIAL

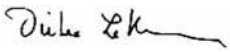
Liebe APL-Freundinnen und -Freunde,

unser Editor hat es wieder einmal geschafft: Das neue *Journal* ist fertig geworden. Ich möchte den Autoren herzlich für ihre Beiträge danken. Zu viel APL werden Sie diesmal nicht finden, aber ein bisschen mathematische Theorie kann auch nicht schaden.

Wer im vergangenen Jahr an APL 2002 in Madrid teilnahm, hat vielleicht die letzte klassische APL-Konferenz erlebt. Es gab keine Bewerbung für APL 2003. Inzwischen liegt aber ein Vorschlag des neuen Chairs von SIGAPL Bob Brown vor, eine APL-Konferenz in die „Federated Computer Research Conference (FCRC)" im Juni 2003 in San Diego einzubetten. Diese FCRC wird struktiert werden in eine Reihe von etwa 15 Einzeltagungen verschiedener IT-Bereiche über einen Zeitraum von zwei Wochen und erlaubt eine wesentlich effizientere Organisation. Einzelheiten zu diesem Vorschlag finden Sie im Internet unter http://www.acm.org/fcrc).

Ich wünsche Ihnen viel Freude bei der Lektüre dieses *Journals,* grüße Sie herzlich und hoffe, Sie bei unserer nächsten Tagung in Ehningen am 8. und 9. Mai 2003 zu sehen,

Ihr



Dieter Lattermann

Reiner Nußbaum

Automation für Linux und Unix

(gift-ALU)

Mit dem Verzeichniskonzept und dem Automationsprogramm „gift-ALU“ ist es möglich, individuelle Verarbeitungsanforderungen für Benutzer in einer Verzeichnisstruktur so zu hinterlegen, daß bekannt ist, was zu tun ist (Anwendung: Filetransfer, Komprimieren/Dekomprimieren, toPDF Transformation, Bildverarbeitung,...), für wen etwas zu tun ist (Trennung der Datenbereiche in verschiedene Benutzer/Mandanten) und wie etwas zu tun ist (welche Parameter der Anwendung mitzugeben sind –Bild rechts drehen-). Für die konkrete Verarbeitung reichen Benutzerdaten an der richtigen Stelle aus (=womit ist etwas zu tun). Die benutzerbezogene Verarbeitung läuft in einer Subtask, der über ein standardisiertes Umfeld alle erforderlichen Informationen mitgegeben werden. Die benutzerbezogene Verarbeitung muß somit nur ein einzelnes Problem lösen. Aufgrund des Verzeichniskonzeptes kann die Automation für Anwendungen oder Anwendungsgruppen parallel und unabhängig voneinander verfügbar sein. Soweit die Anwendung dies zuläßt, kann darüber hinaus die benutzerbezogene Verarbeitung von mehreren Dateien parallel erfolgen (gleichzeitiger Versand von Dateien mit ftp).

Vorwort

Gift-ALU ist eine Methode, mit der man – ohne Job Control oder Scripte – alle Informationen, welche für eine individuelle, parameterisierte Verarbeitung für beliebige Anwendungen in einem Verzeichnisbaum hinterlegt und abgearbeitet werden können (z.B.: Sende eine Datei für Benutzer1 an Email-Adresse abc@def), automatisch und spezifisch weiterverarbeiten kann. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, Folgen von Arbeitsschritten (Jobabläufe) über das Verknüpfen von Verzeichnissen ebenfalls ohne Job Control oder Scripte zu realisieren (z.B.: komprimiere eine Datei mit ‚zip‘ und transferiere sie mit ftp an xyz@server1).

Die Unterscheidung verschiedener Datenbereiche (Benutzer/Mandanten) sowie die Zuordnung zu Anwendungen erfolgt in übergeordneten Verzeichnissen.

Mit einer derartigen Verzeichnisstruktur und dem Automationsprogramm gift-ALU ist es möglich, Anwendungen oder Anwendungsgruppen einzeln oder parallel zu betreiben. Soweit eine Anwendung dies unterstützt, ist darüber hinaus auch die parallel gestartete Verarbeitung einer Anwendung zur gleichzeitigen Verarbeitung verschiedener Eingabedaten möglich (z.B.: gleichzeitiger Versand von Dateien an beliebige ftp-Server). Die einzige Voraussetzung für das Starten der individuellen Verarbeitung ist die Existenz von Verarbeitungsdaten an der ‚richtigen Stelle‘.

Es wird beschrieben, wie

- die Verzeichnisstruktur für das Hinterlegen parameterisierter Benutzerjobs in einem Verzeichnisbaum sowie das Erstellen von Jobabläufen über Verweise in Verzeichnisbäumen maschinell gepflegt werden kann,
- die hinterlegten Abläufe zeitgesteuert oder quasi ereignisgesteuert zur Verarbeitung gelangen, wobei die Existenz von Verarbeitungsdaten ausreicht und
- die (beliebigen) Anwendungen über ein vereinheitlichtes Anwendungsumfeld ausgeführt werden.

Verzeichnisstruktur (beliebige) Anwendung

Mittels der Verzeichnisstruktur werden (beliebige) Anwendungen für eine individuelle und parameterisierte Verarbeitung vorbereitet. Hierbei können Job Control oder Job-Scripte entfallen.

Im folgenden werden ausschließlich Verzeichnisse dargestellt.

```
...Automation1                          ‘Anker’ für mehrere Anwendungen
        Anwendung1          ‘Anker’ für eine Anwendung
                (benutzerübergreifende Daten)
                Benutzer1               Benutzer von Anwendung1
                    (Benutzerbezogene Daten)
                    Input
                            Parm1    Parameter für die Anwendung
                            Parm2    Parameter für die Anwendung
                            ...
                             Output  ggf. Ausgabebereich
                Benutzer2                (analog)
                ...
        -Anwendung2                     (analog)
        -...
```

Als Beispiel wird die Verarbeitung einer großen Anzahl von Bilddateien gezeigt:

Wenn eine große Anzahl von Dateien, welche etwa mit einer Digitalkamera aufgenommen wurden, für eine Internetpräsentation bereitgestellt werden sollen, besteht das Problem, die vorhandenen Bilder in ihrer Auflösung an das Erscheinungsbild der Internetseite und der (Bildschirm-) Darstellung anzupassen. Geschieht diese Anpassung manuell, so muß jede Bilddatei einzeln mit einem Graphikprogramm aufgerufen, in der Größe angepaßt,

ggf. eine Bildrotation veranlaßt und als neues Bild gespeichert werden. Dies kann sehr aufwendig sein.

Die gewünschte Verarbeitung kann in einem Verzeichnisbaum wie folgt dargestellt werden:

▶ Beispiel: Bildverarbeitung

```
..Automation_x
        Bildverarbeitung
                Reiner.Nussbaum
                        Input
                                to_800x600          Bildgröße ändern
                                to_800x600r90       Bildgröße ändern
                                                    und rechtsdrehen
                                to_800x600r270      Bildgröße ändern
                                                     und linksdrehen
                        Output                      Modifizierte
                                                    Bilder
                Benutzer2
                                to_800x600          Bildgröße ändern
                                to_1024x768         Bildgröße ändern
                                ...
```

Als weitere Möglichkeit ist eine komfortablere Endbenutzersicht wie folgt zu obigem Beispiel gegeben:

```
Reiner.Nussbaum/home
        meinebilder
                standardbild: <-Link zu
                        ...Automation_x/Bildverarbeitung/
                                Reiner.Nussbaum/Input/to_800x600
                links: <-Link zu
                        ...Automation_x/Bildverarbeitung/
                                Reiner.Nussbaum/Input/to_800x600r90
        ...
```

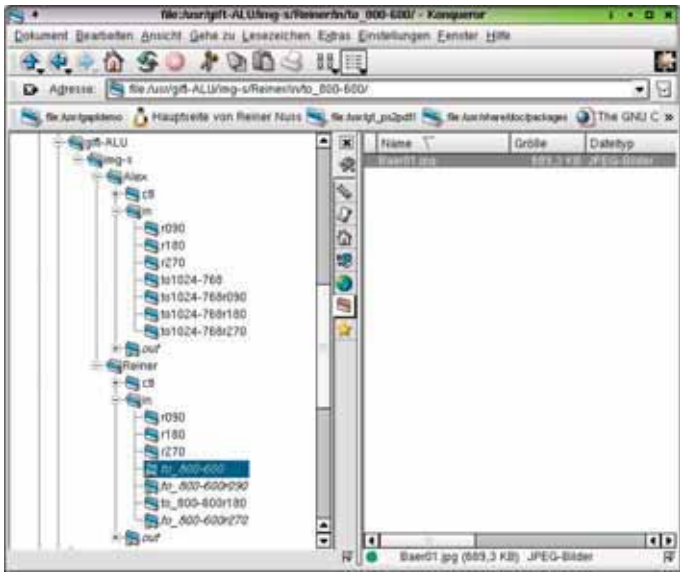
sowie

```
andererBenutzer/home
        pics
                resize_small: Link zu
                        ...Automation_x/Bildverarbeitung/
                                Benutzer2/Input/to_800x600
                larger_images: <-Link zu
                        ...Automation_x/Bildverarbeitung/
                                Benutzer2/Input/to_1024x768
```

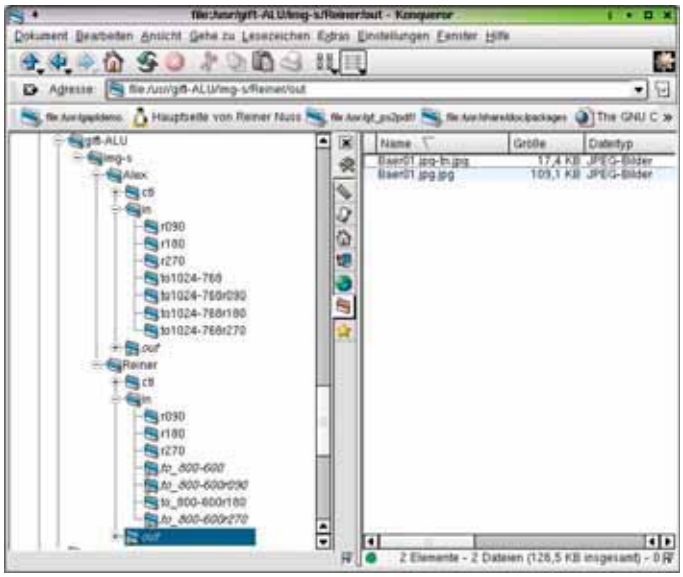
Aus Sicht des Benutzers sind die Bilder von der Digitalkamera in diesem Falle nur in die entsprechenden Verzeichnisse zu stellen, um die gewünschte Verarbeitung zu erreichen.

▶ Aufbaubeispiel:

➤ Eingabe:



➤ Ergebnis:



Verzeichnisstruktur verknüpfen mit Anwendungen (Jobablauf)

Jobabläufe verarbeiten Benutzerdaten in mehreren Schritten. Anstelle von individuellen Prozessfolgen mittels job control Skripten wird der Jobablauf in der Verzeichnisstruktur dargestellt. Hierbei wird der Ausgabebereich einer individualisierten Anwendung mit dem Eingabebereich einer anderen Anwendung verknüpft. Somit stehen die Ausgabedaten eines Verarbeitungsschrittes unmittelbar für die Verarbeitung des darauffolgenden Schrittes zur Verarbeitung bereit.

Im folgenden werden ausschließlich Verzeichnisse dargestellt.

Redaktionsschluss für Artikel-Einsendungen APL-Journal:
30. August 2003

```
...Automation1                  'Anker' für mehrere Anwendungen
        -Anwendung1             'Anker' für eine Anwendung
        (benutzerübergreifende Daten)
   Benutzer1                Benutzer von Anwendung1
        (Benutzerbezogene Daten)
        Input
                Parm1  Parameter für die Anwendung
                Parm2  Parameter für die Anwendung
                ...
        Output
                Verzeichnis1 <-LINK zu
                        [...Automation_n/Anwendung_y/Benutzer_z/
                          Input/Parm1]
                ...


...Automation_n                 'Anker' für mehrere Anwendungen
        -Anwendung_y            'Anker' für eine Anwendung
                (benutzerübergreifende Daten)
                Benutzer_z              Benutzer von Anwendung1
                        (benutzerbezogene Daten)
                        Input
                                Parm1       Parameter für die Anwendung
                                Parm2       Parameter für die Anwendung
                                - ...
- ...
```

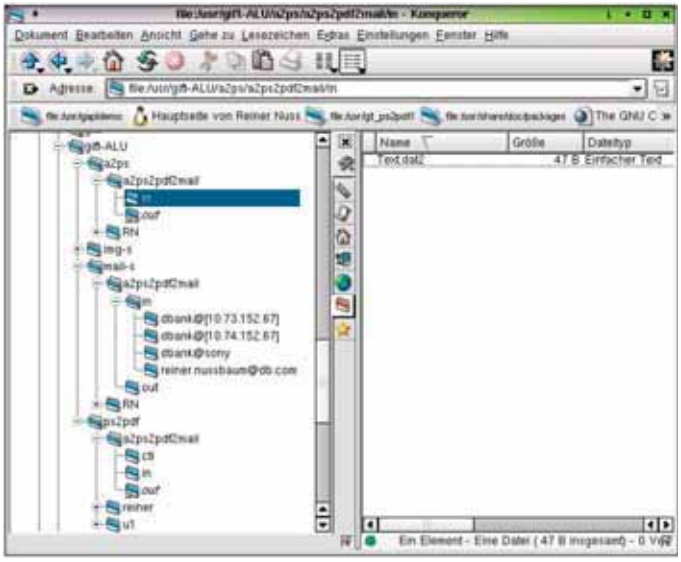
Beispiel:

Eine Host-Reportdatei soll als 'Acrobat Reader' (pdf)-Datei via e-mail versandt werden. (Annahme: die Host-Datei wird per ftp transferiert und liegt als ascii-Datei vor)

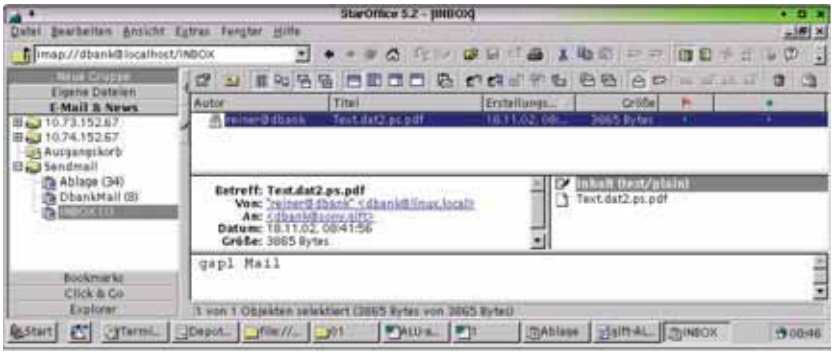
Benutzer: a2ps2pdf2mail (der Einfachheit wegen gleich für alle involvierten Verfahren)

Ablaufbeispiel:

Eingabe (Nach dem Transport der Host Report Datei zu dem Linux Rechner):



Ergebnis:



```
Anwendung1 (a2ps): Wandle ascii Dateien in eine Postscript Datei
        ...a2ps                 Anwendungs Anker
                a2ps2pdf2mail   Benutzer
                        input           Eingabebereich
                        output  Ausgabebereich
Verknüpfung zur Methode2:
link to ...ps2pdf/a2ps2pdf2mail/input als ...a2ps/a2ps2pdf2mail/output

Anwendung2 (ps2pdf): Wandle Postscript nach Acrobat Reader

        ...ps2pdf               Anwendungs Anker
                a2ps2pdf2mail   Benutzer
                        input           Eingabebereich
                        output  Ausgabebereich
Verknüpfung zur Methode 3:
link to ...mail/a2ps2pdf2mail/input/user2@def.com als ...ps2pdf/a2ps2pdf2mail/output

Anwendung3 (mail): Versende Datei via e-mail

        ...mail                 Anwendungs Anker
                a2ps2pdf2mail   Benutzer
                        input           Eingabebereich
                                user1@abc.com           konfigurierter Empfänger
                                user2@def.com           konfigurierter Empfänger
                                ...
```

Verfahren zum Bereitstellen einer Anwendung

Das Individualisieren und Parameterisieren für die Verarbeitung erfolgt anwendungsbezogen über die Verzeichnisstruktur. Für den Start der Verarbeitung ist die Existenz von Daten an der richtigen Stelle erforderlich.

Das technische Bereitstellen eines Verfahrens geschieht wie folgt:

Die Steuerung erhält als Konfigurationsdaten die Bezeichnung der Anwendung, den Namen des Anwendungs-Hauptverzeichnisses (Anwendungs 'Anker'), den Namen der auszuführenden Anwendung, sowie Betriebsparameter (einmaliger Lauf oder Zeitintervalle minimum, maximum, increment).

```
setze Konfigurationswerte (Verzeichnisstruktur des
                        Verfahrens, Betriebsin-
                        formationen)
loop: {finde Benutzer
        finde Verarbeitungsdaten
        starte subtask -verarbeite Daten-
        warte auf Arbeit - oder Ende }
```

Da Anwendungen über die Verzeichnisstruktur getrennt sind, können verschiedene Anwendungen mit diesem Verfahren parallel betrieben werden. Soweit eine Anwendung dies unterstützt ist darüber hinaus auch die parallel gestartete Verarbeitung einer Anwendung zur gleichzeitigen Verarbeitung verschiedener Eingabedaten möglich (z.B.: gleichzeitiger Versand von Dateien an beliebige ftp Server).

Die konkrete Anwendung läuft in einer subtask, welcher alle vorhandenen Informationen zur personifizierten und parameterisierten Verarbeitung notwendig sind, mitgegeben wird.

Die konkrete Anwendung muß nur ein einzelnes Problem lösen. Das generelle Problem des Individualisierens (finde Benutzer) und Parameterisierens (finde Verarbeitungsdaten) wird über die Verzeichnisstruktur und die Anwendungssteuerung gelöst.

Da die Benutzerinformationen einschließlich der individuellen Verarbeitungsparameter in der Verzeichnisstruktur der Anwendung hinterlegt sind, kann die Wartung (z.B.: Hinzufügen von Benutzern oder Parametern für die Verarbeitung durch das Erstellen der entsprechenden Verzeichnisse) im laufenden Betrieb geschehen.

Die Erstellung von Job Control oder job-sepzifischer Scripte ist nicht erfordelich. Dies gilt für einzelne Arbeitsschritte und für

Verfahren zum Bereitstellen vieler Anwendungen

das Verketten von Arbeitsschritten (Job-Abläufe).

Anwendungen können unter einem Automationsverzeichnis angeordnet werden.

Das technische Bereitstellen vieler Anwendungen geschieht wie folgt:

Die Steuerung erhält als Konfigurationsdaten die Bezeichnung der Anwendungsgruppe, den Namen des Automations 'Ankers' für die Anwendungen, sowie Betriebsparameter (einmaliger Lauf- oder Zeitintervalle minimum, maximum, increment).

Da Automations 'Anker' über die Verzeichnisstruktur getrennt sind, können verschiedene Anwendungruppen mit diesem Verfahren parallel betrieben werden.

Verfahren zum Verwalten der Verzeichnisstruktur

Da die Verzeichnisstrukturen unabhängig von einer konkreten Anwendung sind, können die notwendigen Verzeichnisse maschinell erstellt werden, wenn die Konfigurationsinformationen (Automations Anker und Anwendungs Anker) vorliegen.

Da die Verzeichnisstruktur von Benutzern unabhängig von einer konkreten Anwendung ist, kann die standardisierte Verzeichnisstruktur maschinell erstellt werden, wenn die Konfigurationsdaten (Automations-Anker und Anwendungs-Anker) sowie der 'Benutzername' vorgegeben werden. Das benutzerbezogene Parameterisieren der Anwendung geschieht durch das Erstellen von geeigneten Input Unterverzeichnissen.

Das Erstellen von Jobabläufen (mehrstufiger Ablauf der Verarbeitung) kann automatisiert werden bei Vorliegen der Informationen des Datenlieferanten (Konfigurationsdaten Automations Anker, Anwendungs Anker, Benutzer, Unterverzeichnis im Ausgabebereich) sowie der Informationen des Datenempfängers (Konfigurationsdaten Automations-Anker, Anwendungs-Anker, Benutzer, Unterverzeichnis im Eingabebereich). Mittels des Erstellens eines Verzeichnis Verweises sind die Ausgabedaten des ersten Verarbeitungsschrittes unmittelbar als Eingabedaten des zweiten Verarbeitungsschrittes verfügbar.

An keiner der genannten Stellen wird Job Control benötigt.

```
setze Konfigurationswerte (Verzeichnisname des Automations-
                           'Ankers', Betriebsinformationen)
loop: {finde Anwendung
            starte Anwendung [einmaliger Lauf]
            warte auf Arbeit - oder Ende }
```

Kontakt:

Reiner Nußbaum,
eMail: reiner.nussbaum@web.de

Anzeige

IBM®

Workstation APL2
for Multiplatforms Version 2.0
IBM Programm-Produkt-Nr. 5724-B74, Teile-Nr. 45P7514

David Liebtag

APL2 Gui-Tools

GSE and APL Germany

7 & 8 November 2002

APL Products and Services
IBM Silicon Valley Laboratory

Ordering Workstation APL2

- ➢ Passport Advantage
  - ❑ Volume Discounts
  - ❑ Tradeup price
  - ❑ Software Maintenance
- ➢ Free to educators through Scholars Program
  - ❑ ibm.com/university/scholarsprogram
- ➢ Füll price from ibm.com

- The best way to order the product is through Passport Advantage, IBM's volume discount program. The program has recently been enhanced to not require volume purchases for enrollment.
- You can get an upgrade price through Passport Advantage if you have APL2 for OS/2, Windows, AIX, or Solaris.
- Passport Advantage orders include Software Maintenance which entitle you to download CSDs.
- Members of educational institutions can get APL2 for free through the IBM Scholars Program
- You can buy Workstation APL2 for full price at ibm.com but you don't get Software Maintenance.

APL2 Online Support

- ➢ Support at ibm.com/software/ad/api
  - ❑ Technical notes, TechNotes
  - ❑ Frequently Asked Questions, FAQs
  - ❑ Documentation, manuals in PDF form
  - ❑ Software Maintenance

- IBM has enhanced the support web sites. We now offer several types of support online:
- Technotes are solutions to customer reported problems
- FAQs give how-to information
- All workstation and most mainframe manuals are available online
- CSDs are available to customers who have purchased lSoftware Maintenance through Passport Advantage

Workstation APL2 Version 2 Service Level I

- ➢ Interpreter
- ➢ Development Environment
- ➢ External Functions and APs
- ➢ Fixes for user reported problems
- ➢ GUI Tools

- The new CSD includes many fixes and enhancements.
- They are presented in groups, listed here.
- The development environment and GUI fixes are Windows only.

Version 2.1 - Interpreter

- ➢ Deviation Removal
  - ❑ DPW is a session variable
  - ❑ Maximum rank increased from 63 to 64
- ➢ Numeric Precision and System Fuzz Issues
- ➢ EXP edge conditions

- Previously on the workstation, QuadPW has been saved in the workspace. This was a deviation from the language specification and the mainframe behavior. It is now a session variable that persists across)LOADs and)CLEARs.
- Previously on the workstation, the maximum rank of arrays was 63. This was different than the mainframe. For compatibility, it has been increased to 64.
- Various fixes were made to the interpreter's handling of numeric precision and system fuzz.
- Various bugs in EXP were fixed.

Version 2.1 - Development Environment

- Object editor Supports mixed matrixes
- Mark All menu command
- Marked lines only checkbox in Find dialog
- Menu command to sort names in header
- Color code local names
- Check for localized labels

- These changes are Windows only.
- The object editor supports matrices containing character scalars, character vectors, and numeric scalars. (All types of numbers.)
- Green items are in response to GSE requirements.

Version 2.1 - External Fns and APs

- DISPLAY and TIME external functions
- AP 119 Datagram sockets - sendto and recvfrom
- AP 127/227 -isol invocation Option
- AP 207 Print orientation

```
⍝ 'MENU' ('PRINTER SETUP' 'ORIENTATION' 'LANDSCAPE')
⍝ 'MENU' ('PRINTER SETUP' 'ORIENTATION' 'PORTRAIT')
```

- Now that we have support for namespaces, we can use them in the product.
- The DISPLAY and TIME functions are now shipped in a namespace. You use them as external functions.
- Datagram sockets do not guarantee delivery. They are typically used for sending non-critical information such as polling a changing value.
- -isol sets the default isolation level for ap 127 and 227.
- The AP 207 MENU command has been enhanced to provide a way to specify the orientation of the paper under program control. The slide shows the syntax.

Version 2.1 - Fixes for User Problems

- Overbar invalid in)VARS,)FNS,)OPS,)NMS
- Selective spec case works on APL2/PC, not on new APL2
- Incorrect Output from 0 2 format
- Cannot use name class to access object in namespace
- APL2 terminates on repeat DNA from namespace
- CHECKWS messages on)SAVE
- STA yields Domain Error converting 370 floating point

- The CSD includes many fixes. Some reported by customers; some we found. This is just a sample of problems we've fixed that were reported by German customers.

Version 2.1 - GUI Tools

- Dynamic window creation
- Positioning and sizing
- Numeric grids
- Printing properties

- There has been several significant enhancements to the GUI application development tools. They are presented in groups, listed here.
- Dynamic window creation enables creation of windows without use of the dialog editor and templates.
- The positioning and sizing enhancements make it easier to dynamically design dialogs.
- The grid control now supports numeric data.
- Printing support has been enhanced to fulfill some customer requirements

Version 2.1 - Dynamic Window Creation

- Creation of dialogs and controls without using the dialog editor
- No dialog templates required
- Syntax:
  - `CREATEDLG 'STYLES'`
  - `CREATECTL DIALOG 'CLASS' ⍞STYLES' [ID [CTLDATA]]`
- HOW_CONTROL variable lists classes and styles

- The CREATEDLG function previously required a dialog template as a right argument. It now accepts a character vector containing a list of styles. Valid styles include Max, Min, Vscroll, Hscroll, SizeBorder. There are quite a few. Unlike the dialog editor, the defaults are designed to be the most commonly used. CREATEDLG creates an empty dialog; it does not contain any controls.
- The new function CREATECTL is used to create controls within dialogs.
- The first argument is the handle of the dialog.
- The second argument is the class of control to create.
- For example, 'push button' or 'entry field'.
- The third argument is a vector containing a list of styles.
- Each class of control has a variety of styles.
- The Id parameter is optional and indicates the identifier for the control.
- CtlData is used with grid and slider controls to specify the initial range of the control.

Version 2.1 - Positioning and Sizing

- Properties:
  - CLIENT POSITION
  - CLIENT SIZE
  - MAXIMUM SIZE
  - MINIMUM SIZE
  - OFFSET
  - SPLIT
  - STATE MINMAX
- Functions:
  - SIZETOTEXT
  - CENTER CHILD

- These are new properties and functions which make it easier to dynamically create dialogs.
- The CLIENT POSITION property positions a control relative to the parent's client area.

- The CLIENT SIZE property is used to specify how large a client area a dialog should have.
- The MAXIMUM SIZE and MINIMUM SIZE properties are used to specify limits to which a dialog can be resized.
- The OFFSET property makes AP 145 automatically resize and reposition controls as the dialog is resized.
- The SPLIT property is used to position the boundary between the panes in a split style dialog.
- The state STATE MINMAX property is used to query or set the minimized and maximized state of dialogs.
- The SIZETOTEXT function resizes a control to fit the data in the control.
- The CENTER_CHILD function centers a control within it's parent's client area.

Version 2.1 - Numeric Grids

➢ MIXED style enables numeric Support
➢ Cells can contain:
- ❑ Character scalar
- ❑ Character vector
- ❑ Numeric scalar

- Grid controls now support numeric data. Hurrah!
- The object editor is an example of what you can do.

Version 2.1 - Printing Properties

➢ New PRINT_PROPERTY function
➢ Properties:
- ❑ MINIMUM MARGINS
- ❑ MARGINS
- ❑ PAPER SIZE
- ❑ ORIENTATION
- ❑ POSITION

- A new function is supplied for controlling properties of the GUITOOLS print tools.
- The right argument is a property name.
- The optional left argument is a property value.
- If a left argument is supplied, the property is set.
- If no left argument is supplied, the property's value is returned.
- The minimum margins property can only be referenced.
- It returns the minimum margins supported by the printer.
- The margins property is used to reference or set the actual margins used.
- The paper size property can only be referenced.
- It returns the size of the paper.
- The orientation is a Boolean property. 0 for portrait. 1 for landscape.
- The position property is used to control where the next PRINT_SENTENCE should draw text on the page. The origin of the page is the lower left corner.
- Margin, size, and position properties are in points (1/72 inch.)

Version 2.1 - Miscellaneous GUI

➢ 3 State check boxes
➢ Sort style for list and combo boxes
➢ FONT property of dialog is inherited by controls
➢ PICTURE property sets dialog's icon
➢ GETPARENT
➢ GETCHILDREN
➢ STATE APE property

- The dialog editor and AP 145 documentation has said for years that 3 state check boxes are supported But, they never actually worked. They do now.
- List boxes and combo boxes can now have the sort property. This style is necessary when using the Windows DlgDirList and DlgDirSelectEx APIs which can be accessed using the AP 145 AplLoadService command.
- The FONT property can now be applied to dialogs. Controls created with CREATECTL inherit the font of their parent dialog.
- The new PICTURE property is used to set dialogs' icons.
- GETPARENT returns the handle of a window's parent.
- GETCHILDREN returns the handles of a window's children.
- The STATE APL property is used to enable APL input.

Contact:

David Liebtag, APL Products and Services, IBM Silicon Valley Laboratory, San Jose, California, eMail: liebtag@us.ibm.com

IBM APL Products and Services

GSE and APL Germany, Fall 2002

Werner Schäfer

Lösung von Randwertproblemen

Ein Beitrag zur Verbesserung der Genauigkeit bei der numerischen Lösung von linearen Differentialgleichungen unter Verwendung von z.B. biharmonischen Polynomen mit oder ohne Zuhilfenahme der Methode der finiten Elemente (FE), aufgezeigt an der Lösung der Plattengleichung: $B \cdot \Delta\Delta\, w(x, y) = p(x, y)$. Bei Nutzung biharmonischer Basis-Polynome gestattet der Algorithmus der hier beschriebenen Rechenmethode die Formulierung eines exakten Lösungsansatzes zur Generierung von Formfunktionen, welche die Bipotentialgleichung voll erfüllen; sie sind daher gut geeignet, um in der Methode der finiten Elemente eingesetzt zu werden. Ferner liefert dieser neuartige Algorithmus Möglichkeiten, Einflußflächen aller statischen Schnittgrößen in Platten mit beliebig geformtem Rand zu berechnen. Darüber hinaus kann ein geschlossener Lösungsansatz entwickelt werden, mit dem es möglich ist, die Biegefläche zu berechnen sowie alle Schnittgrößen, die aus ihr ableitbar sind, sowie alle Verformungsgrößen, die aufgrund einer Flächenbelastung auftreten, ohne daß irgend welche Einschränkungen bezüglich der geometrischen Form bestehen und ohne daß man das Tragwerk in Segmente aufteilen muß.

Summary

In der Physik werden Randwertprobleme meistens in Form von Differentialgleichungen (Dgl) und durch die Bedingungen beschriebenn, die an den Rändern des Gültigkeitsbereiches der *Dgl* zu beachten sind. Für die meisten Randwertprobleme existieren jedoch keine exakten Lösungen; denn es lassen sich nur in ganz wenigen Fällen Lösungsansätze formulieren, welche die folgenden drei Anforderungen für die Lösung eines Randwertproblems exakt erfüllen. Dies sind die exakte :

- Lösung der Dgl, die Erfüllung aller geometrischen sowie die Erfüllung aller physikalischen Randbedingungen

Ingenieure und Physiker müssen sich daher fast immer mit Näherungslösungen für Randwertprobleme begnügen. Die Güte jeder Näherungslösung wird allerdings sehr stark durch die gewählte Reihenfolge bei der Bearbeitung der oben formulierten drei Anforderungen beeinflußt. Der Algorithmus für das unten beschriebene Lösungsverfahren für Randwertprobleme läßt nur die nachstehende Ablauffolge zu:

- Zuerst den Lösungsansatz für die exakte Lösung der Dgl formulieren,
- danach mit Hilfe der im Lösungsansatz vorgesehenen Freiwerte die Berechnung aller exakten Randbedingungen in den ausgewählten Randpunkten in Angriff nehmen.

Als exakter Lösungsansatz für die *Dgl* wird gemäß Ritz [13] folgende unendliche Reihe gewählt:

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_i c_i \varphi_i(x, y)$$

Die Funktion φ_0 (x, y) steht für ein partikuläres Integral, das die inhomogene *Dgl* exakt erfüllt.

Jedes Glied in der Reihe $\sum_i c_i \varphi_i$ (x, y) muß voll der homogenen *Dgl* genügen; c_i steht für den Freiwert, der jeder Funktion φ_i (x, y)zugeordnet ist. Die Reihe $\sum_i c_i \varphi_i$ (x, y) beinhaltet soviel Reihenglieder, wie Randbedingungen in allen ausgewählten Randpunkten exakt erfüllt werden sollen.

Im exakten Lösungsansatz für die Plattengleichung steht φ_i (x, y) für ein biharmonisches Basis-Polynom, das die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta\, \varphi_i$ (x, y) = 0 voll erfüllt. Im Abschnitt D) werden biharmonische Polynome detailliert besprochen.

Der Algorithmus des hier vorgestellten Lösungsverfahrens wird anhand des speziellen elastostatischen Randwertproblems bei Flächentragwerken detailliert aufgezeigt. Dieses spezielle Randwertproblem wurde „gezielt“ als Demo - Beispiel gewählt, weil es vorwiegend Bauingenieure waren, die zu Anfang die Entwicklung von Näherunglösungen vieler schwieriger statischen Probleme unter Nutzung der FE-Methode vorangetrieben haben.

Die vorgeschlagene Näherungslösung für Randbedingungen basiert auf der Möglichkeit, alle Randbedingungen nur an ausgewählten Punkten entlang der Ränder des Gültigkeitsbereiches der *Dgl* exakt zu erfüllen, ohne dadurch eine exakte Lösung des vollständigen Randwertproblems von vornherein in Frage zu stellen. Die Güte der Näherungslösung, welche die Randbedingungen hinreichend erfüllt, hängt nur von der Anzahl Randpunkte ab, in denen die Randbedingungen exakt erfüllt werden sollen. Je näher beieinander diese frei wählbaren Punkte entlang der Ränder angeordnet sind, desto besser schmiegt sich die berechnete Approximation an die exakten Werte der zu erfüllenden Randbedingungen an.

Das hier beschriebene Lösungsverfahren weicht diametral von der Lösungsmethode für finite Elemente (FE) ab; denn die FE-Methode basiert in erster Linie auf der exakten Einhaltung der

geometrischen Übergangsbedingungen entlang der gesamten Netzlinie zwischen den zwei dort aneinandergrenzenden Elementen; während die für die Beschreibung der Biegefläche genutzten Formfunktionen der homogenen Plattengleichung nicht genügen. Die FE- Methode liefert daher immer von den exakten Werten wesentlich größer abweichende Schnittgrößen in Flächentragwerken als das hier vorgestellte Lösungsverfahren.

Die nicht exakte Erfüllung z.B. der vollständigen Plattengleichung einerseits und andererseits die Vernachlässigung der statischen Übergangsbedingungen, d.h. die Nichteinbeziehung der Randkräfte entlang der Netzlinie zwischen zwei direkt nebeneinander liegenden Elementen in die Gleichgewichtsbedingungen sind die Hauptursachen für fehlerhafte Ergebnisse nach der FE- Methode bei der Schnittgrößenberechnung in Plattentragwerken.

Bei Nutzung biharmonischer Basis-Polynome gestattet der Algorithmus der hier beschriebenen Rechenmethode die Formulierung eines exakten Lösungsansatzes zur Generierung von Formfunktionen, welche die Bipotentialgleichung voll erfüllen; sie eignen sich daher gut für den Einsatz in der FE-Methode; ferner liefert dieser neuartige Algorithmus Möglichkeiten für die Berechnung von Einflußflächen aller statischen Schnittgrößen in Platten mit beliebig geformtem Rand. Auch ist die Entwicklung eines geschlossenen Lösungsansatzes für die Berechnung der Biegefläche und alle aus dieser ableitbaren Schnittgrößen sowie Verformungsgrößen in Folge einer Flächenbelastung möglich, ohne daß irgend welche Einschränkungen bezüglich der geometrischen Form bestehen sowie auch ohne Aufteilung des Tragwerkes in Segmente.

A) Einleitung

Viele Vorgänge und Prozesse werden in technischen sowie in naturwissenschaftlichen Bereichen in Form von Differentialgleichungen (*Dgl*) beschrieben. Eine vollständige und geschlossene Lösung von Differentialgleichungen ist aber nur in Sonderfällen möglich.

Mit der Etablierung des Computers am Arbeitsplatz wurden die numerischen Lösungsverfahren für Differentialgleichungen wesentlich erweitert und verbessert.

Die *FEM* (*F*inite *E*lemente *M*ethode) ist heute das am häufigsten angewandte Berechnungsverfahren für die numerische Lösung sowohl von gewöhnlichen als auch von partiellen Differentialgleichungen, d.h. von Anfangs- oder Randwertproblemen. (Der Autor setzt voraus, daß dem Leser die *FEM* bekannt ist; daher wird auf eine eingehende Erläuterung dieses Verfahrens verzichtet.)

Die *FE-M*ethode basiert auf der Umsetzung ingenieurspezifischer Denkansätze in das numerische Rechnen. Ihr liegt der Gedanke — z.B. in der Elastomechanik — zugrunde, das zu berechnende Bauteil durch ein aus vielen Teilen (Elementen) zusammengesetztes Ersatzmodell näherungsweise zu erfassen.

Wenn auch allgemein die *FEM* als Approximationsverfahren deklariert wird, so können dennoch mit deren Hilfe für Randwert- bzw. Anfangswertprobleme insbesondere im elastomechanischen Bereich auf numerischem Wege die exakten Lösungen für die Verformungen und Schnittgrößen in 1-dimensionalen konstruktiven Bauteilen gewonnen werden.

Die exakte Lösung aller Randwertprobleme für 2- und 3-dimensinale Bauteile ist dagegen nur approximativ möglich, da die für die exakte Lösung des Randwertproblems erforderlichen drei Bedingungen

- Exakte Lösung der zugehörigen Dgl
- Erfüllung der geometrischen Randbedingungen an allen Elementrändern
- Erfüllung der statischen Randbedingungen an allen Elementrändern

bei der FE-Methode nicht alle vom Lösungsansatz gleichzeitig erfüllt werden können. In den meisten Fällen kann nur eine von obigen drei Bedingungen durch die Wahl eines spezifischen Lösungsansatzes exakt realisiert werden.

Bei der Wahl des Lösungsansatzes für ein mehrdimensionales elastomechanisches Randwertproblem wird bislang in erster Linie darauf geachtet, daß von diesem die geometrischen Randbedingungen am Übergang zwischen zwei aneinandergrenzenden finiten Elementen eingehalten und somit Sprünge und Knicke in den Verformungen am Übergang von einem zu andern Element vermieden werden. Für die Lösung der zugehörigen *Dgl* begnügt man sich mit einer Näherungslösung; die Erfüllung der statischen Randbedingungen entlang der Netzlinien wird meistens vernachlässigt. Es wird statt dessen das Gleichgewicht zwischen den Festhaltekräften aller in einem Netzknoten zusammentreffenden einzelnen finiten Elemente gefordert. Dieser bislang übliche Lösungsweg für mehrdimensionale elastomechanische Randwertprobleme führt zu Fehlern in den Ergebnissen sowohl für die Verformungsgrößen als auch für die statischen Größen.

Nur für eindimensionale finite Elemente können obige drei Bedingungen von einer speziellen eindimensionalen Ansatzfunktion (Lösung der homogen *Dgl* des biegesteifen Stabes) exakt erfüllt werden. Weil hierbei die punktförmige Verbindung der einzelnen finiten Elemente untereinander nur an deren Elementenden erfolgt, ist eine exakte Beschreibung des Kraftflusses sowohl im Element als auch an dessen Enden möglich und damit die Erfüllung der geometrischen und statischen Randbedingungen gleichzeitig gewährleistet.

Die in 2- bzw. 3-dimensionalen Tragwerken nicht gegebene gleichzeitige Erfüllungsmöglichkeit obiger drei Bedingungen resultiert aus der Tragwerksaufteilung (bzw. der Aufteilung des Gültigkeitsbereiches der) in einzelne 2- bzw. 3-dimensionale finite Elemente, die nur punktförmig in Netzknoten geometrisch und statisch miteinander verbunden sind, während die Elementränder zwischen den Netzknoten als nicht verbunden betrachtet werden. Speziell aus dieser punktförmigen Verbindung resultiert die Ungenauigkeit in der Schnittgrößen- berechnung nach der FE-Methode, denn die Weiterleitung von statischen Größen über die Netzlinien hinweg von Element zu Element wird in den Gleichgewichtsbetrachtungen eines 2- oder 3-dimensionalen Tragwerkes nicht einbezogen. Dadurch ergeben sich im Schnittgrößenverlauf, der sich aus verschiedenen partiellen Ableitungen der endgültigen Biegefläche des Gesamttragwerkes errechnet, Differenzen in den Schnittgrößen entlang der Netzlinien zwischen zwei benachbarten finiten Elementen. Trotz identischer geometrischer Elementform, trotz identischer elementbezogener Ansatzfunktion und trotz identischer äußerer Elementbelastung resultieren obige Differenzen stets aus nicht gleich großen Knotenverformungen in einander analogen Elementknoten zweier benachbarter finiter Elemente.

Alle oben angeführten Fehler in der Lösung des elastomechanischen Randwertproblems mit den Algorithmen der FE-Methode skizziert S. Pickardt [1] (auf Seite 50) sehr anschaulich:

Ein statisches Problem mit finiten Elementen lösen heißt, den wahren Lastfall durch einen anderen Lastfall ersetzen.

FE-Lösung	$\boldsymbol{u}_h$	*Exakte Lösung*	$\boldsymbol{u}$
Äußere Kräfte	$\boldsymbol{p}_h$	*Äußere Kräfte*	$\boldsymbol{p}$
Schnittkräfte	$\boldsymbol{S}_h$	*Schnittkräfte*	$\boldsymbol{S}$
Lagerkräfte	$\boldsymbol{L}_h$	*Lagerkräfte*	$\boldsymbol{L}$

Das rechte Problem soll gelöst werden. Statt dessen löst man das linke Problem. Statt $\boldsymbol{p}$ *wird das System mit* $\boldsymbol{p}_h$ *belastet. Statt der Bemessung die Schnittgrößen* $\boldsymbol{S}$ *des wahren Lastfalls zugrunde zu legen, bemißt man für die Schnittkräfte* $\boldsymbol{S}_h$ *des FE-Lastfalles. Dies ist der Fehler, den man begeht, wenn man ein Problem näherungsweise mit finiten Elementen löst.*

Entscheidend ist nur die Frage:

1. *Wie groß sind die Fehler?*
2. *Wie stark unterscheiden sich die Schnittkräfte und die Verformungen der beiden Lastfälle* $\boldsymbol{p}$ *und* $\boldsymbol{p}_h$*?*

In der hier vorliegenden Arbeit wird bei der Wahl des Lösungsansatzes für die Bearbeitung von Randwertproblemen **nicht**, wie bislang allgemein üblich, die *exakte Erfüllung der geometrischen Randbedingungen* in den Vordergrund gestellt, sondern *ausschließlich die exakte Lösung der zum vorliegenden elastomechanischen Randwertproblem gehörenden Dgl***.** Für die beiden anderen Bedingungen verbleibt dann meistens nur eine Näherungslösung. Dennoch läßt sich mit dem hier vorgeschlagenen Lösungsansatz z.B. die Genauigkeit der Schnittgrößenberechnung theoretisch durch die Anordnung zusätzlicher Elementknoten entlang den Netzlinien zwischen den Elementeckknoten beliebig weit erhöhen, weil deren Werte mit dem nachfolgend skizzierten Algorithmus asymptotisch an die tatsächlichen Werte der Schnittgrößen im Tragwerk herangeführt werden können.

Der hier vorgeschlagene Lösungsweg basiert auf folgenden Annahmen und Voraussetzungen:

1. Exakte Lösung der *Dgl*:

a) Für die homogene Plattengleichung

➡ Als Lösungsansatz wird ein biharmonisches Polynom gewählt, das die Bipotentialgleichung exakt erfüllt

b) Für die inhomogene Plattengleichung

➡ Als Lösungsansatz wird ein partikuläres Integral der vollständigen Dgl – ein Polynom oder ein zweidimensionaler Potenzterm, welche beide die Bipotentialgleichung nicht erfüllen, - gewählt.

2. Erhöhung der Genauigkeit der approximativen Lösung für die statischen Übergangsbedingungen – z.B. gleich große Biegemomente – in den gemeinsamen Eckknoten zweier benachbarter Elemente:

➡ Durch die Einführung weiterer Verformungsgrößen wie z.B. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, etc.
als zusätzliche Knotenvariablen in allen Elementeckknoten.

3. Erhöhung der Genauigkeit der approximativen Lösung sowohl für die geometrischen als auch für die statischen Übergangsbedingungen entlang den Netzlinien zwischen den zwei dort aneinander grenzenden Elementen:

➡ Durch die Anordnung weiterer Elementknoten auf der Netzlinie zwischen den gemeinsamen Eckknoten zweier dort aneinander grenzenden Elemente.

➡ Durch die Wahl der Durchbiegung sowie des Tangentenwinkels an die Biegefläche senkrecht zum Elementrand als weitere Knotenvariablen an allen zusätzlichen Elementknoten.

➡ Durch die Einführung weiterer Verformungsgrößen wie z.B. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, etc.
oder eine Kombination aus beiden etc. als zusätzliche Knotenvariablen in allen oder in einzelnen ausgewählten Elementknoten.

Die Definition der Ansatzfunktion für die Formfunktionen unter Verwendung von biharmonischen Basis-Polynomen bewirkt, daß:

- die Anzahl der Freiwerte in der Ansatzfunktion die exakte Erfüllung der homogenen Plattengleichung nicht tangiert, da in der Ansatzfunktion jeder Freiwert mit einem eigenen biharmonischem Basis-Polynom verbunden sein muß;
- das partikuläre Integral der inhomogenen Plattengleichung ebenfalls nicht durch die Anzahl der Freiwerte in der homogenen Lösung der Plattengleichung tangiert wird;
- die Einbeziehung mehrerer Elementknoten entlang den Netzlinien in den Lösungsansatz für das Randwertproblem die geometrischen und statischen Übergangsbedingungen zwischen zwei nebeneinander liegenden Elementen näher an die exakte Lösung heranführt.
- die zusätzliche Einführung von Verformungsgrößen wie $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, etc.
  oder eine Kombination aus beiden als weitere Knotenvariablen in den Elementpunkten dort die statischen Schnittgrößen – wie z. B. Moment und Querkraft – auch an den Netzlinien benachbarter Elemente näher an deren exakte Werte im kontinuierlichen Tragwerk heranführt.

i Hinweis:

Zur leichteren Einarbeitung für „Nicht-Statiker" in den Algorithmus beim hier gewählten Beispiel „Lösung der Plattengleichung" wird nachfolgend der Beschreibung von Begriffen, Methoden sowie Berechnungsabläufen in der Elastomechanik mehr Raum als sonst üblich eingeräumt. Dadurch soll die analoge Übertragung aller hier beschriebenen Algorithmen auf die Lösung anderer Randwertprobleme erleichtert werden.

Die Generierung einer exakten oder nahezu exakten Lösung für die vorliegende Aufgabenstellung hängt ab:

- Vom Lösungsansatz für das Anfangs- bzw. Randwertproblem: Klassischer Ritzansatz mit zwei getrennten, voneinander unabhängigen Lösungen, einmal für die inhomogene *Dgl* und zum anderen für die homogene *Dgl*; die vollständige Lösung der *Dgl* ergibt sich aus der Überlagerung beider Lösungen.
  Von der Art und Weise wie das Grundgebiet in sogenannte Elemente (Teilgebiete) untergliedert wird.
  Von der Wahl der Ansatzfunktion (z.B. Polynom) für die Lösung der *Dgl* innerhalb des einzelnen Elementbereiches.
- Von der Genauigkeit, mit der die homogene *Dgl* von den elementbezogenen Formfunktionen (Interpolationspolynomen) erfüllt wird.

- Von der Genauigkeit, mit der die geometrischen und statischen Randbedingungen seitens der homogenen Ansatzfunktion (Polynom) für die verschiedenen Formfunktionen des gewählten Elementes erfüllt werden.
- Von der Art und Weise, wie exakt die 'Störfunktion' (wie Belastungen etc.) der jeweiligen *Dgl* im Bereich eines finiten Elementes z.B. durch partikuläre Integrale erfaßt wird.

Die *FEM* kennt bislang zwei Möglichkeiten für eine Verbesserung der numerischen Lösung eines Randwertproblems**,** die beide auf der Erfüllung der geometrischen Randbedingungen an allen Elementrädern basieren.

- Verkleinerung der Elementabmessungen (u. a. Nutzung adaptiver Netze) ➞ h-Netze
- Verwendung eines Polynoms höheren oder auch niederen Grades ➞ p-Strategie
  (im Fall einer Wiederholung der Rechnung: ➞ erfolgt neuer Lösungsansatz für die Dgl im Elementbereich)

Mit Hilfe beider Wege wird bislang die Approximation im Einzelfall näher an die exakte Lösungsfunktion des Randwertproblems (*Dgl***)** herangeführt; Unstetigkeiten im Verlauf der höheren Ableitungen von Approximationsfunktionen (z.B. Schnittgrößen) können am Übergang von Element zu Element zwar mit obigen beiden Verbesserungsvorschlägen oftmals verkleinert aber nicht beseitigt werden; letzteres gilt insbesondere für den Schnittgrößenverlauf im Element, wenn dieser z.B. aus einer Flächenbelastung herrührt (siehe Pickardt [1] und [1.1].

Den spezifischen Schnittgrößenverlauf in einem Tragwerk gewinnt man in der Elastomechanik mit Hilfe spezieller Differentialoperatoren aus der Lösungsfunktion des Randwertproblems**.** Falls hierbei beachtenswerte Ungenauigkeiten in den Ableitungen der Lösungsfunktion auftreten, beeinträchtigen letztere die Tragwerkssicherheit; in diesem Fall ist das approximativ gefundene Lösungsergebnis nicht brauchbar.

Differenzieren bewirkt bekanntlich ein 'Aufrauhen aller Ableitungen' der vorgegebenen Ausgangsfunktion, wie dies ein Vergleich zwischen der Kurvenglattheit der Ableitungen und der Glattheit der dazugehörigen Ausgangsfunktion zeigt. Differenzieren führt besonders bei allen approximativ gefundenen Lösungen zu einer Vergrößerung der Ungenauigkeit in den Funktionswerten ihrer Ableitungen gegenüber der Ungenauigkeit der Werte in der Lösungsfunktion selbst. Sehr ausgeprägt findet man diese Ungenauigkeit (Unstetigkeit) in Schnittgrößen links und rechts von der Netzlinie zwischen zwei Elementen bei einer approximativ ermittelten Lösungsfunktion der vollständigen Plattengleichung.

In allen Fällen, in denen die Lösungsfunktion der tragwerkspezifischen *Dgl* selbst nicht explizit benötigt wird, sondern ausschließlich nur deren höheren Ableitungen (z.B. die 2. bis 4. partiellen Ableitungen der Biegefläche für die Schnittgrößenbestimmung innerhalb einer Platte), ist eine numerisch brauchbare Lösung für jedes elastomechanische Randwertproblem bislang nur mit sehr kleinen Elementen und außerdem nur mit Approximationsfunktionen, welche die tatsächliche Lösungsfunktion nahezu identisch abbilden, d.h. sich dieser sehr gut anschmiegen, möglich.

Im Laufe der letzten 30 Jahren sind große Anstrengungen unternommen worden, Fehlerabschätzungsalgorithmen für verschiedene geometrische Formen von 'finiten Elementen' zu finden. Derartige Abschätzverfahren sollen dazu dienen, dem Ingenieur und dem Physiker a priori Hilfsmittel an die Hand zu geben, um die Konvergenzfähigkeit des Lösungsansatzes bezogen auf den einzelnen Elementtyp überprüfen zu können.

Die Möglichkeit, die Konvergenz aller Berechnungsergebnisse eines gesamten Netzes, das sich aus einer Vielzahl finiter Elemente zusammensetzt, zu überprüfen, ist - soweit dem Autor bekannt - bislang noch nicht gefunden worden. Somit kann man erst wenn der erste vollständige Rechnungsdurchlauf abgeschlossen worden ist, die Genauigkeit der gefundenen Lösung an Hand einer grafischen Aufzeichnung der Ergebnisse qualitativ abschätzen.

Die Genauigkeitsuntersuchung von *FEM* Berechnungen war in den letzten ca. 30 Jahren das Thema vieler wissenschaftlicher Arbeiten. Die ältesten dieser Veröffentlichungen konzentrierten sich vornehmlich auf die Suche nach zweckmäßigen geometrischen Elementformen und auf die Wahl von geeigneten Formfunktionen für finite Elemente. Während der letzten Jahre stand die „dynamische" Strukturierung der Knotennetze (Anwendung ➞ adaptive Netzverdichtung) vorwiegend im Mittelpunkt von Genauigkeitsanalysen.

Die Literatur obiger Untersuchungen ist sehr umfangreich; aus diesem Grund werden hier nur zwei Schriftenreihen mit vielen wichtigen FEM-Berichten in deutscher Sprache [2] und [3] angeführt. Insbesondere wird dort in allen Aufsätzen meistens auf eine Vielzahl bahnbrechender englischsprachiger Arbeiten verwiesen. Es sind dies:

- Tagungsbände: Tagung „Finite Elemente in der Baupraxis" [2]. Diese Tagungen wurden etwa im Dreijahresrhythmus an verschiedenen deutschen Universitäten seit 1970 abgehalten. In allen Tagungsbänden wird zeitnah über die wesentlichen wissenschaftlichen Fortentwicklungen in der FE-Methode sowie über deren Einsatz in der Praxis berichtet.
- Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover [3]. Hier findet man z.B. im Bericht F 98/4 – Festschrift anläßlich der Emeritierung von Herrn Prof. Dr. Ing. Dr. Ing. E.h. Dr. h.c. mult. E. Stein – unter anderem ein umfangreiches Literaturverzeichnis, das den „weltweiten" Entwicklungsstand der *FE-M*ethode aufgezeigt.

Die in der Baustatik angewandten Algorithmen der *FE-M*ethode basieren überwiegend auf Weggrößen. Als Weggrößen werden Verformungen (Verschiebungen und Verdrehungen bzw. deren höhere Ableitungen) der einzelnen Elemente in deren Festhaltepunkten (Knoten) in die Berechnung eingeführt. Der Gültigkeitsbereich der elementeigenen Formfunktionen wird durch den Elementbereich begrenzt.

Den in dieser Arbeit vorgeschlagenen Lösungsweg bestimmen in besonderen Maße drei Wege bzw. Verfahrensweisen, die generell - über die weiter oben angeführten zwei allgemeinen Kriterien hinaus - zu einer Genauigkeitserhöhung speziell bei der Schnittgrößenberechnung für mehrdimensionale Tragwerke führen. Es sind dies:

- Auswahl des Lösungsansatzes.
- Genauigkeitsfördernde Auswahlkriterien für Ansatzfunktionen bzw. für Formfunktionen.
- Möglichkeiten zur Behebung der Unstetigkeiten im Schnittgrössenverlauf in den NetzKnoten.

Für ein leichteres Einlesen in die Handhabung der drei Möglichkeiten wird zunächst der in der *FE-M*ethode geläufige Approximationsansatz skizziert.

B) Approximationsverfahren unter Verwendung von biharmonischen Interpolationspolynomen

Für die numerische Bestimmung der Lösungsfunktion einer *Dgl* bzw. der Lösungsfunktionen mehrerer *Dgl* wird gemäß der *FE-M*ethode der gesamte Gültigkeitsbereich der jeweiligen *Dgl* mit Hilfe von Netzlinien (siehe Abbildung 1) in eine Vielzahl kleiner Teilbereiche (Elemente) unterteilt. Gemäß dieser Netzaufteilung wird jede Approximation der Lösungsfunktion(en) einer oder mehrerer *Dgl* auf elementbegrenzte Interpolationsfunktionen abgestellt.

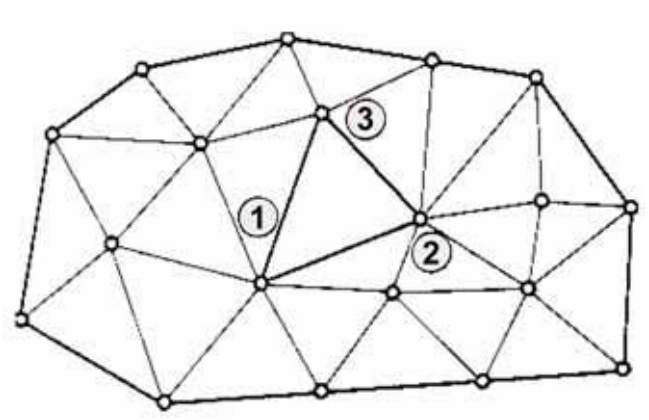


Abb. 1: Aufteilung einer Platte in einzelne Elemente

Bei der Approximation werden die geometrischen Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Elementen nur in ausgewählten Punkten, den sogenannten Netzknoten, auf der Basis von Weggrößen definiert. Neben den Eckpunkten eines Elementes können als Stützpunkte für die Interpolation auch noch andere Punkte herangezogen werden, wie z.B. Punkte, die auf den Elementrändern (Netzlinien) zwischen den Elementeckpunkten angeordnet sind. Je mehr Interpolationspunkte für ein Element gewählt werden, desto höher wird der Grad eines jeden Interpolationspolynoms.

Alle oben erwähnten Interpolationspolynome (Formfunktionen) sind funktional von der gewählten Ansatzfunktion für die Approximationslösung der *Dgl* und von der geometrischen Gestalt des einzelnen finiten Elementes abhängig.

In der Elastomechanik repräsentiert der dehn-, biege- und torsionssteife Stab das 1-di-mensionale finite Element; für die Lösung der Scheiben- und der Plattengleichung wird das rechteckige bzw. dreieckige oder parallelogrammförmige 2-dimensionale finite Flächenelement herangezogen; für die Berechnung von Schalentragwerken werden 3-dimensionale Elemente wie z.B. das Hexaederelement oder das Prismenelement oder das Parallelepipedelement.verwendet.

Im Bereich eines jeden Elementes wird unabhängig von seiner geometrischen Form und Ausdehnung die volle Gültigkeit der *Dgl* der jeweiligen Aufgabenstellung vorausgesetzt.

Die Ansatzfunktion für die Lösung der *Dgl* und alle daraus abgeleiteten Interpolationsfunk-tionen müssen zum einen auf das Problem bezogen und zum anderen abgestimmt auf die geometrische Form des Elementes so definiert werden, daß mit ihrer Hilfe die Stetigkeitsbedingungen beim Übergang von einem zum anderen Element – zumindest in ausgewählten Punkten auf den Netzlinien – entsprechend der geforderten Genauigkeit erfüllt werden können. Die Stetigkeiten an den Elementbegrenzungen sollen z.B. in der Elastomechanik außer den geometrischen und statischen Bedingungen innerhalb des Netzes auch den statischen und geometrischen Lagerungsbedingungen in der realen Bauwerkkonstruktion genügen.

Alle finiten Elemente, bei denen die gewählte Ansatzfunktion für die approximative Lösung des Randwertproblems**,** welche speziell die geometrischen Stetigkeitsbedingungen an den Elementbegrenzungslinien – also an den Übergängen von Element zu Element – erfüllt, werden 'konforme' Elemente genannt.

Die Freiwerte aller oben schon häufig erwähnten Ansatzfunktionen für die Bestimmung der Interpolationsfunktionen werden bislang in der Literatur überwiegend auf die geometrischen Übergangsgrößen in den Stützpunkten (Knoten) des Netzes abgestellt.

Man findet allerdings auch heute in der Literatur 'nichtkonforme' finite Elemente, mit denen befriedigende Lösungen für das gegebene Randwertproblem erzielt wurden, obwohl die Verwendung derartiger Lösungen - mathematisch gesehen - nicht haltbar und zulässig ist.

Wie bereits oben beschrieben, wird in der vorliegenden Arbeit explizit die exakte Lösung der Plattengleichung bei Ermittlung der approximativen Lösung des Randwertproblems in den Vordergrund gestellt. Bei allen nachfolgenden Betrachtungen werden wir uns allerdings nicht auf konforme Elemente beschränken.

Nachfolgend wird zur Beschreibung eines genauen Berechnungsverfahrens für die Lösung der Plattengleichung $B \cdot \Delta\Delta\, w(x, y) = p(x, y)$ der klassische Ansatz von Ritz (1) zugrunde gelegt. (B steht hier für die Plattensteifigkeit; der Einfachheit halber setzen wir B =1)

Die vollständige Lösung jeder gewöhnlichen oder partiellen *Dgl* einer Randwertaufgabe läßt sich bekanntlich aufbauen aus der Summe zweier voneinander unabhängiger Lösungen der *Dgl*

(1) $$w^{Pl} = w^{Pl}_{inhom} + w^{PL}_{hom}$$

wobei w^{Pl}_{inhom} für ein partikuläres Integral der inhomogenen *Dgl* und w^{PL}_{hom} für die allgemeine Lösung der homgenen *Dgl* steht.

Bei der *FE-M*ethode auf der Basis von Weggrößen kann man den Aufbau des Lösungsansatzes (1) für jedes finite Element derart nutzen, daß man z.B. w^{Pl}_{inhom} als Lösung der inhomogenen Plattengleichung für das in allen gewählten Knoten starr gelagerte bzw. dort auch eventuell fest eingespannte Plattenelement deklariert. Damit sind in den Stützpunkten (Elementknoten) die Funktionswerte von w^{Pl}_{inhom} und ebenso dort die Werte der Ableitungen von w^{Pl}_{inhom}, welche geometrische Verformungsgrößen in den Knoten repräsentieren, gleich Null. Somit kann die Lösung des jeweiligen Randwertproblems w^{Pl}_{i} wegen der zuvor definierten Lösung für w^{Pl}_{inhom} (partikuläres Integral) ausschließlich auf die Lösung w^{Pl}_{hom} der homogenen *Dgl* abgestellt werden.

Wenn man sich mit der Darstellung der vollständigen Lösung

der *Dgl* sowie einzelner Ableitungen der Lösungsfunktion w^{Pl} (1) nur in den Knoten des Netzes begnügt, kann auf die explizite Formulierung der inhomogenen Lösung w^{Pl}_{inhom} verzichtet werden. Von der inhomogenen Lösung w^{Pl}_{inhom} werden dann für alle Aufgaben in der Elastomechanik z.B. mit einer ruhenden Belastung nur die statischen Festhaltegrößen in den Elementknoten eines jeden für sich allein betrachteten finiten Elementes benötigt; es sind dies diejenigen Festhaltekräfte und -momente, die in den Knoten eines jeden finiten Elementes die Einhaltung der dort definierten geometrischen Randbedingungen des separaten Plattenelementes gewährleisten. Diese Festhaltegrößen werden als äußere Lasten *R* (sogenannte Ersatzlasten) in den Knoten innerhalb des Netzes angesetzt. Mit dieser Vorgehensweise wird der innere Bereich eines jeden Elementes für die Berechnung von w^{Pl}_{hom} vollständig frei von allen äußeren Lasten. Das zu berechnende Gesamttragwerk wird folglich nur noch in seinen Netzknoten durch dort angreifende Einzellasten beansprucht. Durch eine entsprechende Festlegung der Netzlinien und damit der Netzknoten ist fast immer erreichbar, daß äußere Einzellasten möglichst nur noch in den Netzknoten auftreten.

Die homogene Lösung der *Dgl* w^{Pl}_{hom} liefert demzufolge alle geometrischen und statischen Elementgrößen nur in den Netzknoten, die aus der geometrischen Verformung des gesamten Tragwerkes und dessen Lagerung im Raum herrühren. Die inhomogene Lösung w^{Pl}_{hom} eines jeden einzelnen finiten Elementes dagegen ergänzt die statischen Größen aus der homogenen Lösung w^{Pl}_{inhom} nur noch durch solche, die ausschließlich im Bereich des einzelnen Elementes auftreten. Alle aus der inhomogenen Lösung w^{Pl}_{inhom} gewonnenen statischen und geometrischen Größen sind folglich nur von 2. Größenordnung im Vergleich zu den entsprechenden Größen aus der homogenen Lösung w^{Pl}_{hom}. Durch die Überlagerung (1) der homogenen mit der inhomogenen Lösung werden wieder alle Festhaltekräfte in den Netzknoten eliminiert und folglich die im realen Tragwerk nicht vorhandenen Unstetigkeiten in den Schnittgrößen an den Netzknoten, die ausschließlich aus der direkten Elementbelastung herrühren, aufgehoben.

Formfunktionen werden in der Statik allgemein als Einflußlinien (bei 1-dimensionalen Elementen) bzw. als Einflußfelder (bei mehrdimensionalen Elementen) bezeichnet; sie gelten für diejenigen Kraftgrößen (→ Einheitsgrößen), die gemäß „Land“ als Arbeitskomplement den am Knoten ausgelösten Verformungsgrößen zugeordnet sind. Einflußlinien bzw. Einflußfelder für statische Größen sind aber nur dann exakt, wenn diese exakt die tragwerkspezifische homogene *Dgl* einschließlich aller Randbedingungen erfüllen.

Alle statischen Festhaltegrößen in den Knoten eines jeden Elementes, resultierend aus den unmittelbaren äußeren Belastungen innerhalb der Elementbegrenzungen, lassen sich am einfachsten mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit bestimmen, wobei die Funktionswerte der Formfunktionen (Interpolationsfunktionen) als „virtuelle Wege“ sowohl für die zugehörige Festhaltegröße am Knoten als auch für die Wege der unmittelbaren äußeren Elementlasten herangezogen werden.

Die Rückführung der äußeren Belastung im Bereich eines Elementes auf äquivalente Knotenlasten wird in der Statik allgemein als „Ersatzlastverfahren“ bezeichnet.

Aufgrund des oben beschriebenen Algorithmus läßt sich für jedes einzelne Element ***El*** die Approximationsfunktion eines Randwertproblems als Summe von Interpolationsfunktionen formulieren

$$(2)\quad w^{El}_{hom}(x,.) = \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=m_k} w^{El}_{i,k} \cdot N^{El}_{i,k}(x,.)$$

In (2) beschreibt w^{El}_{hom} (x,.) den Wert der Approximationsfunktion im Elementbereich in den (elementeigenen) Koordinaten (x,.); $w^{El}_{i,k}$ steht für die freie Knotenvariable (Interpolationsvariable) **i** am Knoten **k;** $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$ (x,.) bezeichnet im Elementbereich für den Punkt mit den Koordinaten (x,.) den spezifischen Wert der Interpolationsfunktion **i** am Knoten **k**; $\mathbf{m}_k$ ist die Anzahl der freien Knotenvariablen am Knoten **k** und **p** die Anzahl aller Knoten (Stützpunkte) des Elementes ***El***.

Alle Formfunktionen (Interpolationsfunktionen)$\mathbf{N}^{El}_{i,k}$ eines Elementes werden aus der Ansatzfunktion **U** (x, y)(5) bzw. aus deren partiellen Ableitungen definiert, demzufolge muß **U** (x, y) den spezifischen Interpolationsbedingungen jeder $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$in deren Stützpunkten (Netzknoten) voll genügen. Für die Gewährleistung der geometrischen bzw. statischen Übergangsbedingungen werden z.B. folgende Interpolationswerte in [(3.1) bis (3.4) bzw. (3.*)] rechts vom Gleichheitszeichen gefordert; die Interpolationswerte jeder einzelnen Formfunktion entsprechen jeweils einer Zeile der Einheitsmatrix **E**:

$$(3,1)\quad U[x_{k,..}] = \begin{cases} 1 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i=1 \\ 0 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i\neq 1 \\ 0 \text{ für } k\neq j & \text{und } j=1.....p \text{ und } i=1 \text{ bis } m_k \end{cases}$$

$$(3.2)\quad \frac{\partial U}{\partial x}[x_{k,..}] = \begin{cases} 1 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i=2 \\ 0 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i\neq 2 \\ 0 \text{ für } k\neq j & \text{und } j=1.....p \text{ und } i=1 \text{ bis } m_k \end{cases}$$

$$(3.3)\quad \frac{\partial U}{\partial y}[x_{k,..}] = \begin{cases} 1 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i=3 \\ 0 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i\neq 3 \\ 0 \text{ für } k\neq j & \text{und } j=1.....p \text{ und } i=1 \text{ bis } m_k \end{cases}$$

$$(3.4)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}[x_{k,..}] = \begin{cases} 1 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i=4 \\ 0 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i\neq 4 \\ 0 \text{ für } k\neq j & \text{und } j=1.....p \text{ und } i=1 \text{ bis } m_k \end{cases}$$

Für die Gewährleistung auch der statischen Übergangsbedingungen muß jede Interpolationsfunktion $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$ die in (3.*) aufgeführten Interpolationsbedingungen für höhere Ableitungen oder für Kombinationen aus höheren Ableitungen (zugehörig den am Knoten **k** ausgelösten statischen Größen) erfüllen können.

$$(3.*)\quad \frac{\partial^r U}{\partial x^{r-s} \partial y^s}[x_{k,..}] = \begin{cases} 1 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i=m \\ 0 \text{ für } k=j & \text{mit } k=1...j...p \text{ und } i\neq m \\ 0 \text{ für } k\neq j & \text{und } j=1.....p \text{ und } i=1 \text{ bis } m_k \end{cases}$$

In (3.x) steht **k** für den Knoten, in dem die **i** -te Verformungsgröße ausgelöst wird; $\mathbf{m}_k$ ist die Anzahl aller freien Verformungsgrößen im Punkt **k; j** bezeichnet den jeweils betrachteten Knoten und **p** steht für die Anzahl aller Stützpunkte eines Elementes, die für die jeweilige Formfunktion $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$ vorgesehen sind.

Die Formfunktionen $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$ etc. sind somit ausschließlich abhängig :

- Von der gewählten Ansatzfunktion **U** (x, y) (5),
- von der Geometrie des Elementes ***El*** und
- von der Lage ihrer Interpolationsstützpunkte (Knoten) im Bereich des Elementes ***El***.

Unter der analogen Verwendung der elementspezifischen Approximationsfunktion (2) läßt sich die Approximation der homogenen Lösung bzw. der Gesamtlösung eines Randwertproblems für das Grundgebiet (Gültigkeitsbereich der zu lösenden *Dgl*) in jedem Netzknoten ebenfalls als Summe, gebildet aus den Interpolationsfunktionen aller dort aneinandergrenzenden Elemente, formulieren :

(4) $$w_{\text{hom}} = \sum_{j=1}^{j=n} w_j \cdot N_j$$

In $\mathbf{N}_j$ sind all jene Interpolationsfunktionen im betrachteten Knoten **j** aus allen dort aneinandergrenzenden Elementen zusammengefaßt, die derselben Knotenvariablen w_j (4) zugeordnet sind; **n** steht für die Anzahl aller fortlaufend numerierten Knotenvariablen im gesamten Grundgebiet.

Aus (4) unter Beachtung von (2) läßt sich die Ausdehnung der globalen Interpolationsfunktion $\mathbf{N}_j$ über das gesamte Grundgebiet (Tragwerk) ablesen; diese Ausbreitung erstreckt sich gemäß (3.x) nur über die im betrachteten Netzknoten unmittelbar zusammengeführten Elemente. Die geometrische Form der in einem Knoten punktformig verbundenen einzelnen finiten Elemente kann allerdings unterschiedlich ausgebildet sein.

Die Zusammenfassung aller durch (3.x) in den Elementknoten definierten Interpolationsbedingungen für die Funktionswerte der Ansatzfunktion **U** (x, y)(5) bzw. deren partiellen Ableitungen in den Stützstellen der einzelnen Formfunktionen $\mathbf{N}_{i,k}^{El}$ etc. liefert ein lineares Gleichungssystem.

Die Herleitung 2-dimensionaler Formfunktionen $\mathbf{N}_{i,k}^{El}$ (5.3) für ebene finite Elemente mit beliebiger geometrischer Formgebung aus einer gewählten Ansatzfunktion **U**(x, y) (z.B. 2-dimensionales Polynom) gestattet der generell anwendbare Algorithmus (5.x).

(5) $\mathbf{U}(x, y) = \alpha \cdot \Psi$ mit den Zeilenvektoren a und dem Spaltenvektor Ψ

(5.1) $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \ldots\ldots, \alpha_{11} \ldots.$

(5.2) $\Psi^T = 1, x, y, z, x^2, xy, y^2, yz, z^2, \ldots, P_{b,h}, \ldots$

$\mathbf{P}_{b,h}$ bezeichnet in (5.2) ein biharmonisches Basis-Polynom.

Jede einzelne Formfunktion $\mathbf{N}_{i,k}^{El}$ wird gemäß (5) wie folgt definiert.

(5.3) $\mathbf{N}_{i,k}^{El} = \alpha_{\iota,\kappa} \cdot \Psi\, \alpha_1$ mit den Zeilenvektoren $\alpha_{\iota,\kappa}$ und dem Spaltenvektor Ψ (5.2)

(5.4) $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \ldots\ldots, \alpha_{11} \ldots.$

Die exakte Lösung der homogenen Plattengleichung bedingt die ausschließliche Verwendung von biharmonischen Basis-Polynomen als Komponenten des Vektors Ψ (5.2).

Die Anzahl der Freiwerte α_j in (5) wird durch die Anzahl aller gesuchten Formfunktionen für das vorliegende finite Element bestimmt.

Zwischen den Freiwerten α_j in (5.4) und den Einheitswerten der Knotenvariablen $\mathbf{w}_{i,k}$ (7.1) läßt sich in Verbindung mit den Interpolationsfunktionen $\mathbf{N}_{i,k}^{El}$ (3.x) die lineare Beziehung formulieren:

(6) $A \cdot \alpha^T = E$ oder in der inversen Form

(7) $\alpha^T = A^{-1}$ **E** steht in (6) für die Einheitsmatrix

(7.1) $$\overline{w}^T = w_{1,1}^{El}, w_{1,2}^{El}, w_{1,3}^{El}, w_{1,4}^{El}, \ldots, w_{2,1}^{El}, w_{2,2}^{El}, w_{2,3}^{El}, w_{2,4}^{El}, \ldots, w_{1,p}^{El}, w_{2,p}^{El}, w_{3,p}^{El}, w_{4,p}^{El}, \ldots$$

A bezeichnet man als Koordinatenmatrix, weil deren Elemente mit Hilfe der Knotenkoordinaten $[x_k, y_k]$ aus den einzelnen biharmonischen Basis-Polynomen des Ansatzpolynoms **U** (x, y) (5) bzw. aus deren partiellen Ableitungen gemäß den Interpolationsbedingungen (3.x) berechnet werden. Die Matrix **A** ist stützpunktbezogen; sie gilt deshalb auch nur für die jeweils vorliegende geometrische Elementform.

In $\mathbf{A}^{-1}$ (7) stehen spaltenweise alle Freiwerte α_j des Vektors $\alpha_{i,k}^T$ (5.4), zugehörig zu den entsprechenden Knotenvariablen $\omega_{i,k}$ (7.1). Die Elemente einer Spalte aus $\mathbf{A}^{-1}$ liefern in (5.3) eingesetzt das Interpolationspolynom (Formfunktion) $\mathbf{N}_{i,k}^{El}$ für die betrachtete geometrische oder statische Größe **i** am Elementknoten **k .**

Als Ansatzfunktion **U**(x, y) - z.B. für ein Plattentragwerk – muß (gemäß der Zielsetzung A) dieser Arbeit) ein vollständiges oder unvollständiges zweidimensionales Polynom n-ter Ordnung, das sich *ausschließlich aus biharmonischen Basis-Polynomen* zusammensetzt, vorgegeben werden. Mit der gewählten Ansatzfunktion **U** müssen neben der Lösungsfunktion der homogenen *Dgl* auch deren Ableitungen bis zur r-ten Ordnung (3.*) beschrieben werden können, um sowohl den erforderlichen stetigen geometrischen als auch statischen Übergang von Element zu Element in jedem Netzknoten - einschließlich all derjenigen Knoten, die entlang der Netzlinie zwischen zwei Elementen angeordnet sind, - formulieren und gewährleisten zu können.

Die erforderlichen Reihenglieder für die Definition eines vollständigen oder unvollständigen Polynoms n-ter Ordnung (z.B. für 2-dimensional ausgelegte Tragwerke) lassen sich am einfachsten aus dem strukturellen Aufbau eines spezifischen Pascal'schen Dreiecks ablesen (siehe dazu Abschnitt D). In [4] und [5] findet man die Definition von vollständigen sowie von unvollständigen zweidimensionalen Polynomen n-ter Ordnung beschrieben.

Für die Formulierung von Formfunktionen gilt - in dieser Arbeit - die wichtige Voraussetzung, daß alle Komponenten des Vektors Ψ (5.2) der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta w(x, y) = 0$ und damit auch der homogenen Plattengleichung genügen müssen.

Das bis hierhin skizzierte Approximations- und Interpolationsverfahren ist nicht nur auf *finite Elemente* beschränkt, sondern beide Verfahren können auch für *beliebig große Elemente* und damit auch für Plattentragwerke - als ein einzelnes zusammenhängendes Element betrachtet - herangezogen werden.

Anzeige

Das APL-Journal finden Sie zum Download als PDF-Datei auch auf der Webseite des RHOMBOS-VERLAGES unter http://www.rhombos.de/apljourn.htm

B1) Lösung des Randwertproblems für ein Plattentragwerk, das nur als ein einzelnes Element betrachtet wird

Für den Fall, daß die Lösung der Randwertproblems B· $\Delta\Delta \boldsymbol{w}(x, y) = \boldsymbol{p}(x, y)$ für ein Element oder für eine nicht in Elemente unterteilte Platte gefordert wird (siehe A), wird diese mit Hilfe eines partikulären Integrals (z.B. ein zweidimensionaler Polynomterm), das die inhomogenen Plattengleichung erfüllt, und mit einem biharmonischen Polynom, das der homogenen Plattengleichung voll genügt, gewonnen. Alle von diesem partikulären Integral $\mathbf{w}_{inhom}$ (siehe Abschnitt B2) nicht erfüllten statischen und geometrischen Randbedingungen werden anschließend in allen ausgewählten Punkten entlang der Elementränder bzw. entlang des Tragwerkrandes mit Hilfe des biharmonischen Polynoms $\mathbf{w}_{hom}$ realisiert, das aus einer Vielzahl biharmonischer Basis-Polynome aufgebaut sein muß.

Je näher beieinander Interpolationspunkte auf den Netzlinien oder auf den Plattenrändern angeordnet sind, desto näher ragt das gewonnenen Lösungsergebnis an die exakte Lösung des Randwertproblems heran. Grundsätzlich empfiehlt es sich, wenn der Koordinatenanfangspunkt auf einem Elementeckpunkt liegt, die Anordnung aller Knoten entlang den Rändern z.B. bei finiten Elementen oder einer einzelnen Platte unterschiedlich vorzunehmen:

- Bei finiten Elementen sollten die Elementränder in eine gerade Anzahl von Abschnitten unterteilt werden. Die Unterteilung der Elementränder in eine gerade Anzahl von Teilabschnitten hat den Vorteil, daß die Koordinatenmatrix **A** (6) nur um die Zeile und Spalte für jede zusätzlich hinzukommende Randbedingung ergänzt werden muß.
- Bei einer einzelnen Platte jedoch sollten die Plattenränder in eine ungerade Anzahl von Abschnitten unterteilt werden, damit Abweichungen von den vorgegebenen Randbedingungen einer Platte in etwa zur jeweiligen Randmitte symmetrisch verlaufen.
- Für den Fall, daß die Seitenabmessungen unterschiedlich groß sind, ist es angebracht, auch die Anzahl der Knoten auf den Elementrändern unterschiedlich zu wählen.

Bei der Lösung des Randwertproblems B· $\Delta\Delta \boldsymbol{w}(x, y) = \boldsymbol{p}(x, y)$ einer einzelnen Platte greifen wir auf den Ansatz (1) $w^{Pl} = w^{Pl}_{inhom} + w^{Pl}_{hom}$ zurück; mit w^{Pl}_{inhom} bezeichnen wir hier das oben gewählte partikuläre Integral und w^{Pl}_{hom} definieren wir analog (5), (5.1) und (5.2) als biharmonisches Polynom (8).

(8) $$w^{Pl}_{hom} = \alpha_{Rw} \bullet \Psi$$

[Der Index „Rw" in α_{Rw} steht für Randwerte analog α_{ik} (5.4) in der Formfunktion $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$]

Die Randbedingungen (8.x) für alle ausgewählten Randpunkte $[x_k, y_k]$ können wir analog den Interpolationsbedingungen (3.x), wie folgt formulieren:

(8.1) $$w^{Pl}_{hom}[x_k,.] + w^{Pl}_{inhom}[x_k,.] = 0$$

(8.2) $$\frac{\partial w^{Pl}_{hom}}{\partial x}[x_k,.] + \frac{\partial w^{Pl}_{inhom}}{\partial x}[x_k,.] = 0$$

(8.3) $$\frac{\partial w^{Pl}_{hom}}{\partial y}[x_k,.] + \frac{\partial w^{Pl}_{inhom}}{\partial y}[x_k,.] = 0$$

(8.4) $$\frac{\partial^2 w^{Pl}_{hom}}{\partial x\,\partial y}[x_k,.] + \frac{\partial^2 w^{Pl}_{inhom}}{\partial x\,\partial y}[x_k,.] = 0$$

:

:

(8.5) $$\frac{\partial^r w^{Pl}_{hom}}{\partial x^{r-s}\partial y^s}[x_k,.] + \frac{\partial^r w^{l}_{inhom}}{\partial x^{r-s}\partial y^s}[x_k,.] = 0$$

Aus obigen Randbedingungen (8.x) gewinnt man für die Berechnung der gesuchten Freiwerte α_{Rw} - analog (5.1) - des biharmonischen Polynoms (8) das lineare Gleichungssystem

(9) $$A \bullet \alpha^T_{Rw} = -R_{Rw}$$ mit dem Lastvektor (9.1)

(9.1) $$R^T_{Rw} = w^{Pl}_{inhom}[x_k,.], \ldots, \frac{\partial}{\partial x} w^{Pl}_{inhom}[x_k,.], \ldots, \frac{\partial}{\partial y} w^{Pl}_{inhom}[x_k,.], \ldots,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} w^{Pl}_{inhom}[x_k,.], \ldots, \frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\,\partial^s} w^{Pl}_{inhom}[x_k,.], \ldots$$

für k = 1 bis m, mit m = Anzahl aller Knotenpunkte entlang der Plattenberandung

Aus (9) erhalten wir die einzelnen Freiwerte α_j im Vektor α_{Rw} (10) der biharmonischen Basis-Polynome Ψ(5.2)

(10) $$\alpha^T_{Rw} = -A^{-1} \bullet R_{Rw}$$

Die gesuchte vollständige Lösung des vorliegenden Randwertproblems einer einzelnen Platte können wir nun gemäß (11) formulieren.

Die Randwerte (8.x) sind allerdings nur exakt in allen ausgewählten Interpolationspunkten $[x_k, y_k]$ auf der Element- bzw. Plattenumrandung erfüllt! Abweichungen in den einzelnen Randwerten verlaufen annähernd wellenförmig zwischen den Interpolationspunkten eines jeden Randes. Jede durch diese Abweichungen verursachte wellenförmige Plattenverformung zeigt sich in Richtung zum inneren Plattenbereich nur als sehr stark gedämpfte Welle, die in Richtung Plattenmitte schnell abklingt. Je größer die Anzahl der Interpolationspunkte zwischen zwei Plattenecken gewählt wird, desto kleiner ist die „Amplitude obiger Ungenauigkeitswelle" bezogen auf die gesamte Plattenverformung sowie auch auf die aus der Plattenverformung abgeleiteten Schnittgrößen. Der von obigen Randwertungenauigkeiten beeinflußte Plattenbereich erstreckt sich meistens nur auf eine relativ schmale Randzone der Platte; demnach können derartige Ungenauigkeiten sehr oft z.B. bei der Bemessung und Bewehrung einer Stahlbetonplatte vernachlässigt werden.

(11) $$w^{Pl} = w^{Pl}_{inhom} + \alpha_{Rw} \bullet \Psi$$

Alle Freiwerte α_j im Vektor α_{Rw} (10) können für ein Plattentragwerk, das nur als ein einzelnes Element betrachtet wird, auch mit Hilfe des bekannten Algorithmus (12) vom Minimum der Fehlerquadratsumme aus den Randbedingungen (8.x) in den Abschnitten $I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots, I_r, \ldots$ entlang der Elementberandung berechnet werden.

(12) $$I = \int_{I_1}(w^{Pl}(x_r,y_r))^2\,ds + \int_{I_2}(\frac{\partial}{\partial x}w^{Pl}(x_r,y_r))^2\,ds + \int_{I_3}(\frac{\partial}{\partial y}w^{Pl}(x_r,y_r))^2\,ds +$$
$$\int_{I_4}(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}w^{Pl}(x_r,y_r))^2\,ds + \ldots + \int_{I_r}(\frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\,\partial^s}w^{Pl}(x_r,y_r))^2\,ds + \ldots$$

In (12) bezeichnen (x_r, y_r) die Koordinaten aller Punkte entlang den Plattenrändern. Damit die einzelnen Integrale in (12) Ergebnisse von annähernd gleicher Größenordnung liefern, ist es angebracht, den einzelnen Integralen jeweils einen Faktor $\mathbf{l}^m$ zuzuordnen, wobei **m** der Potenz des jeweiligen Differentialoperators entspricht. Dadurch werden jedoch den einzelnen Integralen (12) willkürliche Gewichte beigefügt. Für den Fall, daß in (12) einzelnen Randbedingungen darüber hinaus noch eine besonders herausragende Bedeutung zugedacht werden soll, sind deren zugehörige Faktoren $\mathbf{l}^m$ mit Hilfe eines weiteren individuellen Zahlenfaktors noch stärker herauszustellen; als Wert für **l** kann z.B. die Länge der größten Plattenseite oder der größten Plattendiagonale gewählt werden.

Die Bedingung für das Minimum von **l** (12) aus der Summe aller Integrale lautet unter Beachtung der Freiwerte α_j in α_{Rw} (10):

(13) $$\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} = 0 \qquad \text{mit} \quad j = 1, 2, 3, 4, \ldots r, .. \mathbf{n}$$

(13) liefert ein Gleichungssystem ähnlich (9) mit **n** linearen nichthomogenen Gleichungen zur Berechnung der **n** unbekannten Freiwerte α_j .

Dieser Lösungsweg (11), (12) und (13) ist immer dann von Vorteil, wenn die auf den Plattenrändern ausgewählten Punkte $[x_k, y_k]$ nicht besonders eng - (bezogen auf den Integrationsweg entlang der Elementberandung) – nebeneinander liegen.

Mit dem oben beschriebenen Lösungsweg (8) bis (11) kann eine nahezu exakte Lösung des gegebenen Randwertproblems für alle Elemente mit deren verschiedenen statischen und geometrischen Randbedingungen - sowohl für alle Elemente, die im inneren Plattenbereich angeordnet sind, als auch für alle diejenigen, die unmittelbar am Plattenrand liegen - realisiert werden. Was für finite Elemente gilt, gilt auch speziell für die Berechnung aller statischen und geometrischen Größen einer einzelnen Platte.

Für die geometrische Form eines einzelnen ebenen finiten Elementes sowie für die einer Platte bestehen im aufgezeigten Algorithmus (1) bis (13) keine Einschränkungen.

Mit der Berechnung der Biegefläche $w^{Pl} = w^{Pl}_{inhom} + \alpha_{Rw} \cdot \Psi$ ist das Randwertproblem für die einzelne Platte abgeschlossen. Aus w^{Pl} können die endgültigen Schnittgrößen in allen Plattenpunkten gemäß den Formeln der Tragwerkstheorie für Platten eindeutig bestimmt werden.

C) Aufbau und Herleitung der Gleichungssysteme für die Berechnung der Knotenvariablen für finite Elemente bzw. für ein Flächentragwerk, das in eine Vielzahl finiter Elemente unterteilt ist

Für die Berechnung aller Knotenvariablen (7.1) zugehörig den Interpolationsfunktionen $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$ (5.3) bzw. (2), stehen eine Vielzahl von Variationsprinzipien der Mechanik zur Verfügung. In der Elastomechanik verwendet man meistens das Prinzip vom Minimum der gesamten potentiellen Energie. Nachfolgend werden kurzgefaßt für dieses Prinzip die maßgebenden Rechenoperationen angeschrieben.

Im Abschnitt B) wurde gezeigt, wie der gewählte Ansatz **U** (x, y) (5) für die Lösung der **Dgl** einer Randwertaufgabe in einen Reihenansatz überführt werden kann. Die einzelnen Glieder dieser Reihe (2) bzw. (4) sollen ausschließlich aus zweidimensionalen biharmonischen Interpolationspolynomen bestehen. Als deren Variablen $\mathbf{w}^{El}_{i,k}$ werden geometrische Größen in den Netzknoten und auch in allen zusätzlichen auf den Netzlinien liegenden Elementknoten definiert. Mit einem derartigen Reihenansatz in Verbindung mit einer freien Auswahl aller Knotenvariablen sind die geometrischen und statischen Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Elementen in deren gemeinsamen Knoten auf den Netzlinien a priori erfüllt.

i Hinweis:

An dieser Stelle wird für den Nicht-Statiker kurz aufgezeigt, was man in der Elastostatik unter dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie versteht:

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie wird als Variationsproblem im elastostatischen Bereich aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen abgeleitet. Der Formulierung dieses Variationsproblems wird die Unveränderlichkeit aller Kräfte zugrunde gelegt. Als Kräfte gelten hier zum einen die Spannungen im Inneren der Tragkonstruktion und zum anderen alle Lasten, die von außen – einschließlich aller Kraftgrößen an den Rändern der Platte (Element) - auf das Tragwerk einwirken. Als virtuelle Verrückungen bezeichnet man hierbei die mit den Lagerbedingungen und der Konstruktion des Tragwerkes verträglichen Verschiebungen und Verdrehungen der einzelnen Tragwerkspunkte, die mit verschwindend kleinen Verzerrungen in der Tragwerkkonstruktion verknüpft sind.

Das virtuelle Prinzip besagt nun folgendes: Erteilt man einem im Gleichgewicht befindlichen Tragsystem aus seiner Gleichgewichtslage heraus eine virtuelle Verrückung, so ist die von den äußeren Kräften hierbei geleistete Arbeit δA_a gleich der zugehörigen Arbeit δA_i der inneren Kräfte. Also:

(14) $$\delta A_i - \delta A_a = 0$$

Aufgrund der oben getroffenen Annahme von der Unveränderlichkeit der Kräfte im Rahmen einer virtuellen Verrückung kann man in (14) das Variationszeichen δ vor den gesamten Ausdruck setzen und erhält damit (14.1):

(14.1) $$\delta(A_i - A_a) = 0$$

Den Ausdruck $(A_i - A_a)$ bezeichnet man als potentielle Energie Π des Tragwerkes bezogen auf seine Gleichgewichtslage.

(14.2) $$\Pi = (A_i - A_a)$$

Die Arbeit A_i aller inneren Kräfte (Spannungen) resultierend aus einer virtuellen Verrückung erhält man aus dem Produkt: Spannung mal Arbeitsweg (Verzerrung).

(14.3) $$A_i = \int_V \left(\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \ldots + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}\right) dV$$

Die Arbeit A_a der äußeren Kräfte erhält man ebenfalls aus dem Produkt: Kraft mal Kraftweg. Wenn wir die Komponenten der Volumenkräfte **F** *(oder der Einzellasten oder der ev. an den Elementrändern angreifenden Kraftgrößen) mit* $\mathbf{F}^x$, $\mathbf{F}^y$, $\mathbf{F}^z$ *in Richtung der Achsen des orthogonalen Koordinatensystems und mit* **u, v, w** *die diesen Kräften zuordnenbaren Verformungen des Tragwerkes in den Angriffspunkten der Kräfte* $\mathbf{F}^x$, $\mathbf{F}^y$, $\mathbf{F}^z$ *in Richtung der Koordinatenachsen sowie ferner mit* $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$ *analog die Verrückungen der Oberflächenkräfte* $\mathbf{f}^x$, $\mathbf{f}^y$, $\mathbf{f}^z$ *bezeichnen, berechnet sich die Arbeit A_a der äußeren Kräfte wie folgt:*

(14.4)
$$A_a = \int_V \left(F^x \cdot u + F^y \cdot v + F^z \cdot w\right) dV + \int_O \left(f^x \cdot \bar{u} + f^y \cdot \bar{v} + f^z \cdot \bar{w}\right) dO$$

In (14.3) und (14.4) bezeichne **dV** *das Volumendifferential und* **dO** *das Oberflächendifferential.*

Die Gleichungen (14.3) und (14.4) in Verbindung mit (14.2) besagen nun, daß sich die in der Gleichgewichtslage des betrachteten Tragwerkes wirklich auftretenden Verrückungen dadurch auszeichnen, daß für sie die potentielle Energie Π *des Tragwerkes einen Extremwert annimmt, wobei dieser Extremwert ein Minimum ist, also* $\Pi \rightarrow$ *Minimum.*

Die Arbeitsgleichungen (14.3) und (14.4) gelten zwar für alle Tragwerktypen wie Stab, Scheibe, Platte und Schale, für die praktische Rechnung werden sie jedoch für jeden Tragwerktyp explizit aufbereitet. Dabei werden in (14.3) die Spannungen σ *und* τ *sowie die Verzerrungen* ε *und* γ *durch partielle Ableitungen der Verformungsfunktionen* **u, v, w** *des Tragwerkes beschrieben.*

Aus der mathematischen Bedingung für ein Extremum (hier Minimum) $\frac{\partial \Pi}{\partial w_j}$ erhält man aus der partiellen Differentiation der potentiellen Energie Π für eine gesamte Platte (15) nach den Knotenvariablen $\mathbf{w}_j$ (4) bzw. für ein Plattenelement nach dessen Knotenvariablen $\mathbf{w}^{El}_{i,k}$ (2) ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Verformungsgrößen $\mathbf{w}_j$ bzw. $\mathbf{w}^{El}_{i,k}$.

In (15) wird angenommen, daß keine Verformungen der Elementränder in Richtung der dort angreifenden Kraftgrößen auftreten und darüber hinaus alle äußeren Lasten nur senkrecht zur Plattenebene angreifen!

(15)
$$\Pi^{El}_{Platte} = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \int_G \int \left[w_{xx}^2 + 2\nu \; w_{xx} w_{yy} + w_{yy}^2 + 2(1-\nu) w_{xy}^2\right] dx\, dy - \int_G \int p\, w\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{i=r} F_i w_i$$

mit

- **F** ⇒ Einzelbelastung im Punkt **j** innerhalb des Elementbereiches
- **p** ⇒ Flächenbelastung des Plattenelementes
- **w** ⇒ Biegefläche der Plattenelementes (siehe dazu (2) und (4) sowie (5) und (6))
- $\mathbf{w}_{**}$ ⇒ Partielle Ableitungen der Biegefläche nach den Koordinaten x oder/und y
- **E** ⇒ Elastizitätsmodul
- **v** ⇒ Poisson'sche Zahl
- **h** ⇒ Plattendicke
- **r** ⇒ Anzahl aller Einzellasten im Bereich des Plattenelementes
- **G** ⇒ Bereich des gesamten Plattenelementes

Die Gleichung (15) gilt streng genommen - „im mechanischen Sinn" - nur für konforme finite Elemente, da in (15) keine Arbeit aus den statischen Randgrößen an den Elementrändern erfaßt wird, weil dort ein kontinuierlicher Übergang von Element zu Element vorausgesetzt wird.

Auch für nicht konforme finite Elemente, bei denen mit den gewählten Formfunktionen kein kontinuierlicher Übergang von Element zu Element beschrieben wird, kann (15) dennoch für die Berechnung der potentiellen Energie Π als gute Näherung herangezogen werden, wenn dazu die im Abschnitt A) für den vorgeschlagenen Lösungsweg für elastomechanische Randwertprobleme definierten Annahmen und Voraussetzungen eingehalten werden.

Mit der Realisierung der oben – im Abschnitt A) – getroffenen drei Annahmen und Voraussetzungen wird der Beitrag der statischen Größen an den Elementrändern, wenn entlang der Platten- bzw. Elementberandung die ausgewählten Elementknoten besonders dicht beieinander angeordnet sind, zur gesamten Potentielle Energie Π stark reduziert, so daß dieser in den meisten Fällen in (15) vernachlässigt werden kann.

Mit dieser Vorgehensweise hat z.B. Pucher [6] bei der Berechnung der Einflußfelder für Schnittgrößen in rechteckigen dünnen Platten hinreichend genaue Ergebnisse erzielt, wenn die einzelnen Randbedingungen nur in einer beschränkten Anzahl von ausgewählten Randpunkten erfüllt werden. In ähnlicher Weise hat auch Tölke [7] bei der Berechnung von rechteckigen Pilzdecken die geometrischen Randbedingungen nur für wenige ausgewählte Punkte erfüllt und dennoch hinreichend genaue Ergebnisse für die Biegefläche sowie für die Schnittgrößen erhalten.

Falls die oben empfohlene Vorgehensweise bei einer nur *punktbezogenen* Erfüllung der Randbedingungen in speziellen Fällen nicht genügen sollte, wird auf die Arbeiten von D. Rüdiger [8] ,W. Prager [9] und H. Bufler [10] verwiesen; dort findet man verallgemeinerte Variationsgleichungen für dünne Platten, wobei dort Schnittkräfte und Verschiebungsgrößen an deren Elementrändern zugelassen werden. Die in [8] bis [10] veröffentlichten Algorithmen eignen sich laut des jeweiligen Autors für deren Anwendung in der **FE-Methode**.

Das lineare Gleichungssystem, das sich aus $\frac{\partial \Pi^m}{\partial w_{i,k}} = 0$ ergibt, ist ein Gleichgewichtssystem für alle statischen Größen (Kräfte und Momente), die in den Knoten eines finiten Elementes wirken, und lautet:

(16)
$$\vec{K}^{El} = S^{El} \bullet w^{El}_{hom};$$

(w^{El}_{hom} wurde in (2) definiert. $w^{El}_{hom} \Leftarrow w^{El}_{1,1}, w^{El}_{2,1}, \ldots w^{El}_{m,p}$)

$\vec{K}^{El}$ bezeichnet alle statischen Größen, welche aus Knotenverformungen in den Elementknoten herrühren.
$\mathbf{w}^{El}_{i,k} = 1$ ist der Einheitswert der freien Knotenvariable in Formfunktionen $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$.

Der lineare und funktionale Zusammenhang zwischen den Knotenvariablen w^{EL}_{ho} und den statischen Größen $\vec{K}^{El}$ (16) in den Elementknoten (Stützpunkten) wird für jedes finite Element durch die Elementsteifigkeitsmatrix S^{El} (16) beschrieben. Die Elementsteifigkeitsmatrix S^{El} ist folglich von der geometrischen Elementform sowie von den Formfunktionen $\mathbf{N}^{El}_{i,k}$, von der Anzahl der

Knoten auf der Elementberandung und von der Anzahl eventueller Knoten im inneren Bereich des Elementes abhängig.

Mit dem Grad bzw. der Ordnung des Polynoms einer Formfunktion ändert sich die Steifigkeit eines Elementes. Infolge einer größeren Elementsteifigkeit werden die Rückhaltekräfte (16) größer, die das finite Element auf „seine" Knoten im Netz ausübt, dasselbe gilt auch umgekehrt. Einhergehend mit einer größeren Elementsteifigkeit vergrößert sich der Widerstand des gesamten Tragwerkes gegen alle von den äußeren Belastungen bewirkten Verformungen.

Die Knotenvariablen $\mathbf{w}_j$ (4) werden bei allen elastomechanischen Randwertproblemen für alle Knoten im Netz aus dem Gleichungssystem (17) bestimmt, dessen einzelne Gleichungen sich aus der partiellen Differentiation ($\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}$) des Funktionals Π (15) (potentielle Energie des gesamten Tragwerkes) nach allen Knotenvariablen ergeben.

(17) $$S \bullet \bar{w} = \vec{R}$$

Das Gleichungssystem (17) beschreibt zeilenweise den Gleichgewichtszustand in jedem Knoten des Tragwerkes, der dort aus der Addition der Steifigkeitsgrößen $\mathbf{S}^{El}$ (16) aller am jeweiligen Knoten zusammenstoßenden finiten Elemente und allen am betrachteten Knoten angreifenden äußeren Belastungen resultiert.

Beim Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{S}$ aus $\mathbf{S}^{El}$ sind in (17) vorher die Vektoren aller statischen Größen in den Knoten eines jeden Elementes in das äußere (tragwerkbezogene) Koordinatensystem zu transformieren. Vor Beginn der numerischen Auflösung von (17) sind darin noch alle äußeren Lagerungsbedingungen d.h. die Randbedingungen des Gesamttragwerkes einzuarbeiten. Ohne Berücksichtigung dieser Randbedingungen der Gesamtplatte ist das Gleichungssystem (17) singulär. Erst durch die Einarbeitung aller äußeren Randbedingungen liefert (17) eindeutige Werte für die gesuchten Knotenvariablen (18).

Alle Knotenvariablen, die auf Grund der äußeren Randbedingungen (z.B. starre Lagerung) den Wert Null annehmen müssen, sind aus (17) zu eliminieren; dies erfolgt dadurch, daß die betreffenden Zeilen und Spalten in $\mathbf{S}$ gestrichen werden. Die Spalten aller Knotenvariablen in $\mathbf{S}$, denen auf Grund der Randbedingungen ein fester Wert $\mathbf{w}_j \neq 0$ zugeordnet wird, sind nach dem Streichen der diesen Knotenvariablen zugehörigen Zeilen in (17), in den Belastungsvektor $\vec{R}$ (17) zu verschieben und dabei von den dort bereits vorhandenen Komponenten zu subtrahieren.

In $\bar{w}$ (18) sind alle Knotenvariablen des zu berechnenden Tragwerkes zusammengefaßt.

(18) $$\bar{w}^{\tau} = \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, ..., \mathbf{w}_j, ... \mathbf{w}_n$$

mit $\mathbf{n} \rightarrow$ Anzahl aller unbekannten Knotenvariablen

Zu den äußeren Belastungen $\vec{\mathbf{R}}$ (19) zählen alle direkten Knotenbelastungen sowie alle in den Knoten dort von jedem einzelnen Element abgesetzten Belastungen (Festhaltekräfte und -momente); letztgenannte resultieren aus den innerhalb der Elementbegrenzung angreifenden äußeren Belastungen. Die Wirkungsrichtungen aller äußeren Belastungen $\vec{\mathbf{R}}$ (19) sind durch die Wirkungsrichtungen der freien Knotenvariablen $\bar{\mathbf{w}}$ (18) festgelegt.

(19) $$\vec{\mathbf{R}}^{\tau} = \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, ..., \mathbf{R}_j, ... \mathbf{R}_n$$

mit $\mathbf{n}$ als Anzahl aller Knotenvariablen

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (17) liefert die unbekannten Variablen $\bar{\mathbf{w}}$ (18) in jedem Knoten.

Mit den nunmehr bekannten Knotenvariablen können in Form einer Rückrechnung zum einen die Lösungsfunktion der homogenen **Dgl** aufgebaut und zum anderen mit Hilfe der elementeigenen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}^{El}$ (16) auch in den Knoten eines jeden Elementes die gesuchten statischen Größen des Randwertproblems berechnet werden.

Vor der Berechnung aller statischen und geometrischen Größen im Bereich eines Elementes ist zunächst für das jeweils betrachtete Element analog (1) $w^{El} = w^{El}_{inhom} + w^{EL}_{hom}$ die vollständige Lösung der Biegefläche zusammenzustellen. Die endgültigen Schnittgrößen und Verformungen in allen anderen Elementpunkten lassen sich jetzt gemäß den Regeln der jeweiligen Tragwerktheorie unter Heranziehung der entsprechenden Ableitungen der nunmehr bekannten Lösungsfunktion w^{El} oder aus einer zweidimensionalen Interpolation zwischen den nur in den Netzknoten berechneten Größen gewinnen.

Wenn für den in Abschnitt A) gewählten Lösungsweg dessen Annahmen und Voraussetzungen (z.B. Erfüllung aller geometrischen und statischen Randbedingungen in allen genügend nahe beieinander auf den Netzlinien liegenden Knoten gemäß der geforderten Genauigkeit) eingehalten sind, kann an dieser Stelle die Aufgabenstellung – Berechnung eines Plattentragwerkes mit der FE-Methode - als vollständig gelöst und damit als abgeschlossen betrachtet werden.

Hier sei nochmals darauf hingewiesen, daß durch die Verwendung von biharmonischen Polynomen bei der Definition von Formfunktionen und durch eine dichte Anordnung der Zwischenknoten auf jedem Elementrand eine nahezu exakte Lösung des Randwertproblems erzielt werden kann.

Um für den Aufbau eines Computer-Programmes die Genauigkeit der Elementsteifigkeit $\mathbf{S}^{El}$ (16) für ein ausgewähltes Finites Element einmalig vorweg zu überprüfen, ist es empfehlenswert, dafür die Gleichung (20) heranzuziehen:

- Inwieweit mit der Anzahl der entlang der Elementränder gewählten Knotenvariablen dort alle statischen und geometrischen Randbedingungen in der geforderten Genauigkeit $\mathbf{G}_{Genau}$ (20) gewährleistet sind, läßt sich ***a priori*** aus der Differenz zwischen den Werten der potentiellen Energie gemäß (15) und zum anderen aus dem Wert der verallgemeinerten Variationsgleichung für dünne Platten - formuliert von den Autoren [8] oder [9] oder [10] - ersehen.

(20) $$G_{Genau} = \frac{\Pi^{El}_{Platte}(15) - \Pi^{El}_{[8]\,oder\,[9]\,oder\,[10]}}{\Pi^{El}_{[8]\,oder\,[9]\,oder\,[10]}} \bullet 100\,\%$$

- Für den Fall, daß die geforderte Genauigkeit $\mathbf{G}_{Genau}$ z.B.< 4% nicht erreicht wird, ist die gewählte Anzahl der Knotenvariablen entlang der Elementränder zu erhöhen.

D) Biharmonische Polynome

D1) Historischer Rückblick.

Biharmonische Polynome sind partikuläre Integrale der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0.

Schon im Jahre 1940 verwendete A. Pucher [6] biharmonische Polynome, um Einflußfelder für Plattenbiegung, Biegemomente, Stützmomente, Drillmomente und Querkräfte in dünnen Platten zu berechnen.

Die Einflußfelder von statischen Größen – von der Plattenbiegung bis hin zu den Querkräften – generierte Pucher aus zwei Lösungsfunktionen, die beide der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0 voll genügen. Die erste dieser beiden Lösungsfunktionen beschreibt die spezifische Singularität des jeweiligen Einflußfeldes, die zweite stellt sich im gesamten Plattenbereich als reguläre Funktion dar.

Die singuläre Lösungsfunktion z.B. für die Plattenbiegung formulierte Pucher in geschlossener Form ‚quasi' als die Durchbiegung $W_s = \frac{1}{8B\pi} r^2 \ln \frac{r}{r_0}$ (hier z.B. in Polarkoordinaten) einer im Mittelpunkt durch eine Einzelkraft P=1 belasteten Kreisplatte. Dadurch wird die singuläre Lösung sowohl unabhängig von der geometrischen Form der Plattenbegrenzung als auch von der Lagerung der Platte an ihren Rändern. Wegen dieses Tatbestandes kann die singuläre Lösung keine Randbedingung der Einflußfelder – weder statischer noch geometrischer Natur – an den Plattenränder erfüllen.

Die reguläre Lösungsfunktion entspricht einer reinen Randbelastung, sie muß daher auch der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0 im gesamten Plattenbereich genügen. Pucher definierte diese reguläre Lösungsfunktion als Reihe $W_{b,h} = \sum_i c_i w_i$, wobei er als Biegefunktionen w_i partikuläre Integrale der Bipotentialgleichung wählte. Als die hierfür am besten geeigneten partikulären Integrale wählte er biharmonische Polynome.

Die Erfüllung der Randbedingungen der Einflußfelder an den Plattenrändern erzielte Pucher durch die Überlagerung der Randwerte aus der singulären mit denjenigen aus der regulären Lösungsfunktion in diskreten Randpunkten, wobei die Anzahl dieser diskreten Randpunkte der Anzahl der freien Parameter $\mathbf{c}_i$ im Reihenansatz $W_{b,h} = \sum_i c_i w_i$ entspricht. Die freien Parameter $\mathbf{c}_i$ bestimmte er mit Hilfe des *Minimalprinzips*. Da die Randbedingungen nur in einer begrenzten Anzahl Randpunkte erfüllbar sind, werden Randbedingungen generell nur näherungsweise erfüllt.

Die zur damaligen Zeit von Pucher entwickelten Einflußfelder für die statischen Größen in Plattentragwerken waren bis zum Einsatz der *FE*-Methode bei der Berechnung von Flächentragwerken *das Hilfsmittel*, mit dem der Ingenieur die Schnittgrößen in Plattentragwerken ermitteln konnte.

Die Bezeichnung „biharmonische Polynome" führte Pucher 1940 für alle zweidimensionalen Polynome ein, die der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0 genügen. Die Bezeichnung „biharmonische Polynome" leitete er aus dem in früheren Jahren oft benutzten Namen „biharmonische Differentialgleichung" für $\Delta\Delta$ w = 0 ab. Pucher hat in seiner Arbeit [6] eine Vielzahl spezieller biharmonischer Basis-Polynome bis hin zu Polynomen mit der Ordnungszahl 13 für quadratische Platten beschrieben. Er verwendete für diese Polynome die spezielle Kennzeichnung $\mathbf{P}_{b,h}$, die Indizes *b* und *h* kennzeichnen den Exponenten von x und y im ersten Potenzterm des biharmonischen Polynoms $\mathbf{P}_{b,h}$. Hier wird diese Kennzeichnung für alle biharmonischen Basis-Polynome übernommen.

Der von Pucher entwickelte Aufbau-Algorithmus [6.1] für biharmonische Polynome wurde leider von ihm nie veröffentlicht. In [6] weist Pucher besonders darauf hin, daß Holl [7] schon 1936

Anzeige

http://www.apl-germany.de

APL Germany e.V.

- Homepage
- Wir über uns
- Was ist APL?
- Wer bietet APL an?
- Veranstaltungen
- Literaturhinweise
- APL-Journal
- APL-Nachrichten
- APL-Links

NEW! Herbst-Tagung

Der *APL Germany e.V.* ist ein gemeinnütziger Verein mit Sitz in Düsseldorf. Sein Zweck ist es, die Programmiersprache APL, sowie darüberhinausgehend die Verbreitung des Verständnisses der Mensch - Maschine - Kommunikation zu fördern.

Für Interessenten, die zum Gedankenaustausch den Kontakt zu anderen APL-Benutzern suchen sowie für solche, die sich aktiv an der Weiterverbreitung der Sprache APL beteiligen wollen, bietet *APL Germany e.V.* den adäquaten organisatorischen Rahmen.

Zu diesem Zweck veranstaltet der *APL Germany e.V.* beispielsweise Vorträge, Diskussionen und APL-Kurse, stellt Kontakte zu Computerfirmen her, die APL anbieten, und gibt das Mitteilungsblatt „APL-Journal" heraus.

Um die Kommunikation der Mitglieder untereinander zu erleichtern, hat APL Germany einen Nachrichten-Server eingerichtet. Bei diesem Server kann sich jeder, der an APL interessiert ist einschreiben. Eine Mitgliedschaft bei *APL Germany e.V.* ist nicht erforderlich (aber natürlich gerne gesehen).

Kontaktadresse:
APL Germany e.V.
Rheinstr. 23

D-69190 Walldorf

info@apl-germany.de

Webmaster: webmaster@hoesle-kienzlen.de

biharmonische Polynome ab 4. Ordnung bei der Berechnung von Plattentragwerken verwendet hat; die von Holl definierten zweidimensionalen Polynome seien, so Pucher, allerdings nicht identisch mit den von ihm entwickelten Polynomen (*Basis-Polynome*), sondern seien aus diesen durch Linearkombinationen hervorgegangen.

D2) Algorithmen zur Formulierung von biharmonischen Basis-Polynomen mit Hilfe des „Pascalschen Dreiecks“

Bei der Definition von partikulären Integralen für die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0 stützen wir uns auf die Struktur des „Pascalschen Dreiecks“ [5] (siehe dazu Bild 2) für die Formulierung von zweidimensionalen Polynomen **n**-ter Ordnung. Durch Hinzufügen aller Terme aus der (**n**+1)-ten Reihe im „Pascal'schen Dreieck“ (*weiter unten abgekürzt auch mit „Dreiecks-Reihe“ bezeichnet)* zu den Termen des zweidimensionalen Polynoms **n**-ter Ordnung, gewinnt man das vollständige Polynom (**n**+1)-ter Ordnung. Mit Hilfe des „Pascalschen Dreiecks“ kann man somit sehr einfach, mit der Reihe der Ordnungszahl 0 beginnend, in sukzessiv aufsteigender Reihenfolge alle zweidimensionalen Polynome insbesondere auch höherer Ordnung formulieren.

Biharmonische Basis-Polynome mit der Ordnungszahl **n** können nur aus den Potenztermen der **n**-ten „Dreiecks-Reihe“ [5] zusammengestellt werden.

Ordn.	Anzahl	
n 0	p 1	1
1	3	x y
2	6	x^2 x y y^2
3	10	x^3 x^2 y xy ^{2} y^3
4	15	x^4 x^3 y x^2 y^2 xy ^{3} y^4
5	21	x^5 x^4 y x^3 y^2 x^2 y^3 xy^4 y^5
6	28	x^6 x^5 y x^4 y^2 x^3 y^3 x^2 y^4 xy^5 y^6

Abb. 2: Pascalsches Dreieck für 2-dimenssionale Polynome

Angelehnt an die Anordnung der zweidimensionalen Potenzterme im „Pascal'schen Dreieck“ lassen sich alle biharmonischen Basis-Polynome $\mathbf{P}_{b,h}$ eindeutig der **n**-ten Reihe im „Pascalschen Dreieck“ zuordnen; denn die Summe der Indizes (b + h) in $\mathbf{P}_{b,h}$ liefert immer die Reihennummer **n** ➞ (b + h) im „Pascalschen Dreieck“.

Biharmonische Basis-Polynome sind immer voneinander unabhängige Polynome. Mit den Potenztermen einer jeden Reihe im „Pascalschen Dreieck“ mit der Ordnungszahl **n >3** lassen sich jeweils vier biharmonische Basis-Polynome –- nämlich zwei x-dominante und zwei y-dominante – formulieren.

Die Koeffizienten aller Terme in biharmonischen Basis–Polynomen sind stets reelle Zahlen. Die Verknüpfung (- , +) zwischen den Termen ist stets alternierend. Die Koeffizienten selbst liefert die Lösung eines linearen Gleichungssystems, das aus der Struktur der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0 abgeleitet wird (siehe dazu weiter unten ➞ *Algorithmus für die Definition aller biharmonischen Polynome innerhalb der Gruppen b und c)*.

Für die Formulierung biharmonischer Polynome **n**-ter Ordnung aus den Potenztermen der **n**-ten Reihe im Pascalschen Dreieck ordnen wir alle Dreiecks-Reihen einer der drei Gruppen (**a**, **b**, **c**) zu, da sich der Aufbau der aus den einzelnen Reihen im Pascal'schen Dreieck ableitbaren biharmonischen Polynome **n**-ter Ordnung in diesen Gruppen unterscheidet. Die Polynome der Gruppen **a**, **b**, **c** unterscheiden sich in der Anzahl ihrer Terme, wobei Polynome der Gruppe **a** nur aus einem Term, die der Gruppe **b** aus zwei und die der Gruppe **c** aus mehr als zwei Termen bestehen.

Für die Definition eines partikulären Integrals der vollständigen Plattengleichung (mit B = 1) $\Delta\Delta$ w = p (x, y) können alle Terme in den Dreiecksreihen **n** > 3 oder Kombinationen aus einzelnen Termen herangezogen werden (siehe dazu Abschnitt D3).

Gruppe a:

Alle Terme der „Dreiecks-Reihen“ n ≤ 3 einschließlich der Potenzterme x^3y und xy^3 aus der „Dreiecks-Reihe“ **n** = 4.

Gruppe b:

Alle x-dominanten Basis-Polynome $\mathbf{P}_{b,h}$ für (b, h) ➞ 4, 0 ; 4, 1; 5, 0 und 5, 1 sowie alle y- dominanten Basis-Polynome $\mathbf{P}_{b,h}$ für (b, h) ➞ 0, 4 ; 1, 4 ; 0, 5 und 1, 5 gebildet aus Termen der „Dreiecks-Reihe“ 4 ≥ n ≤ 6.

Gruppe c:

Alle x- dominanten Basis-Polynome $\mathbf{P}_{b,h}$ für (b, h) ➞ 6, 0 ; 6, 1; 7, 0 etc. sowie alle y-dominanten Basis-Polynome $\mathbf{P}_{b,h}$ für (b, h) ➞ 0, 6 ; 1, 6 ; 0, 7 etc. gebildet aus Termen der „Dreiecks-Reihe“ n ≥ 6.

In den Gruppen **b** und **c** erhält man alle x-dominanten Basis-Polynome $\mathbf{P}_{b,h}$ für (b, h) ➞ 4, 0; 4, 1 ; 5, 0 etc. aus den y-dominanten Basis-Polynomen $\mathbf{P}_{b,h}$ für (b, h) ➞ 0, 4 ; 1, 4 ; 0, 5 etc., wenn man in letzteren die Variablen (x , y) in allen Potenztermen gegeneinander austauscht. Daher wird nachfolgend die Definition von biharmonischen Polynomen nur auf x-dominante Basis-Polynome abgestellt.

- **Definition aller biharmonischen Polynome innerhalb der Gruppe a:**

Alle Potenzterme dieser Gruppe erfüllen einzeln exakt die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0, sie sind damit automatisch als biharmonische Polynome anzusehen, die nur aus einem Potenzterm bestehen. Wir können aus diesem Grunde bis maximal alle diese Terme in Form einer linearen Kombination z.B. zum unvollständigen biharmonischen Polynom ${}_{12}^{3}U_{b,h}$ (x, y) zusammenfassen.

$$ {}_{12}^{3}U_{b,h}(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 x^3 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 $$

- Algorithmus für die Definition aller biharmonischen Polynome innerhalb der Gruppen b und c:

(Den nachfolgenden Algorithmus für die Formulierung biharmonischer Basis-Polynome aus den „Dreiecks-Reihen“ n>3 hat der Autor empirisch anhand der von Pucher [6] und Girkmann [12] beschriebenen Basis-Polynome abgeleitet.)

Wie aus Abbildung 2 zu ersehen ist, fällt in der **n**-ten Reihe des „Pascalschen Dreiecks“ der Exponent der Variablen **x** von links

nach rechts also vom ersten bis hin zum letzten Potenzterm von **n** bis **0** ab, während dort gleichzeitig der Exponent der Variablen **y** vom ersten bis hin zum letzten Term von **0** bis **n** ansteigt.

Der Exponent von δx in den drei partiellen Differentialoperatoren der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0 fällt vom ersten bis zum dritten Operator, d.h. im doppelten Laplaceschen Operator

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

von 4 über 2 auf 0, während parallel dazu der Exponent von δy von 0 über 2 auf 4 ansteigt.

Unter Beachtung obiger Aussagen bezogen auf den Exponenten:

a) der Variablen **x** bzw. **y** in den einzelnen Potenztermen jeder Reihe im „Pascalschen Dreieck" und
b) von δx bzw. δy in den drei Differentialoperatoren der Bipotentialgleichung,
läßt sich folgende Regel für die Definition eines biharmonischen Basis-Polynoms aus den Potenztermen der n-ten Reihe (**n > 3**) im „Pascalschen Dreieck" für beide Gruppen **b** und **c** formulieren. Anhand der 8. „Dreiecks-Reihe" mit den Potenztermen 8. Ordnung wird die Anwendung dieser Regel nachfolgend demonstriert:

Regel für die Auswahl der Potenzterme in der n-ten Reihe des „Pascalschen Dreiecks" zwecks Aufbau biharmonischer Basis-Polynome innerhalb der Gruppen b u. c:

1. Aus den Termen jeder n-ten „Dreiecks-Reihe" (n >3) lassen sich zwei x-dominante und zwei y-dominante Basis-Polynome zusammenbauen
2. Terme, die zu einem biharmonischen Basis-Polynom $\mathbf{P}_{b,h}$ n-ter Ordnung zusammengefaßt werden können, müssen stets der n-ten „Dreiecks-Reihe" (n >3) angehören.
3. Zum Zwecke einer eindeutigen Kennzeichnung aller Terme in der n-ten Reihe sind diese aufsteigend von 1 bis (n+1) durchzunumerieren; anschließend sind für den Aufbau aller x- dominanten Basis-Polynome n-ter Ordnung die numerierten Terme n und (n+1) zu entfernen, weil letztgenannte in beiden ersten Differentialoperatoren keinen Beitrag für die Bipotentialgleichung liefern, wie dieses z.B. aus der 8. „Dreiecks–Reihe" leicht abzulesen ist.

$$^8R \Rightarrow (x^8)_1, (x^7y)_2, (x^6y^2)_3, (x^5y^3)_4, (x^4y^4)_5,$$
$$(x^3y^5)_6, (x^2y^6)_7, (xy^7)_8, (y^8)_9$$

Nach Entfernen der Potenzterme $(\cdot)_8$ und $(\cdot)_9$ werden aus ^8R alle Terme mit einer ungeraden Numerierung im Vektor $^8R_{unge}$ und mit einer geraden Numerierung im Vektor $^8R_{ge}$ zusammengefaßt.

.

$$^8R_{unge} \Rightarrow (x^8)_1, (x^6y^2)_3, (x^4y^4)_5, (x^2y^6)_7,$$

$$^8R_{ge} \Rightarrow (x^7y)_2, (x^5y^3)_4, (x^3y^5)_6$$

4. Die gesuchten zwei x-dominanten biharmonischen Polynome $\mathbf{P}_{b,h}$ erhält man aus dem Matrix–Produkt, gebildet aus den Vektoren $^nR_{unge}$ bzw. $^nR_{ge}$ und den reellen normierten Koeffizienten $^n\beta_{unge}$ bzw. $^n\beta_{ge}$.

$^8\beta_{unge} = 1, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, und $^8\beta_{ge} = 1, \gamma_1, \gamma_2$

$P_{n,o} = {}^nR_{unge} \cdot {}^n\beta^T_{unge}$ bzw. $P_{(n-1)1} = {}^nR_{ge} \cdot {}^n\beta^T_{unge}$

Somit können wir in explizierter Schreibweise die beiden x-dominanten biharmonischen Polynome aus der 8. „Dreiecks-Reihe" wie folgt formulieren:

$P_{8,0} = x^8 + \beta_1 x^6 y^2 + \beta_2 x^4 y^4 + \beta_2 x^2 y^6$
$P_{1,1} = x^7 y + \gamma_1 x^5 y^2 + \gamma_2 x^3 y^5$

Beide Basis-Polynome $P_{8,0}$ bzw. $P_{7,1}$ müssen die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta\, P_{b,h} = 0$ erfüllen. Durch separates Einsetzen von $P_{8,0}$ bzw. $P_{7,1}$ in die drei Differentialoperatoren von $\Delta\Delta\, P_{b,h} = 0$:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} P_{8,0}(x,y) = 1680x^4 + 360\beta_1 x^2 y^2 + 24\beta_2 y^4$$

$$2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} P_{8,0}(x,y) = 120\beta_1 x^4 + 288\beta_2 x^2 y^2 + 120\beta_3 y^4$$

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4} P_{8,0}(x,y) = 24\beta_2 x^4 + 360\beta_3 x^2 y^2$$

gewinnen wir für die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten β_j bzw. γ_j in $P_{8,0}$ bzw. $P_{7,1}$ jeweils ein lineares Gleichungssystem.

Die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta\, P_{b,h} = 0$ wird nur dann von biharmonischen Polynomen erfüllt, wenn jeweils die Summe aller Potenzterme gleichen Grades aus allen drei partiellen Ableitungen gleich Null ist.

Für die Berechnung der drei unbekannten Koeffizienten β_j mit j = 1, 2 und 3 erhalten wir durch die getrennte Zusammenfassung der Terme x^4, x^2, y^2 sowie y^4 aus allen drei Differentialoperatoren in jeweils einer linearen Gleichung das folgende Gleichungssystem mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 24 & 0 \\ 360 & 288 & 360 \\ 0 & 24 & 120 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1680 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 35 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Mit den nunmehr bekannten numerischen Werte für β_j können wir das gesuchte biharmonische Basis-Polynom $P_{8,0}$ formulieren.

$P_{8,0}(x, y) = x^8 - 21\, x^6 y^2 + 35\, x^4 y^4 - 7\, x^2 y^6$

Für das zweite x-dominante Basis-Polynom $P_{7,1}$ wird nachfolgend nur noch das lineare Gleichungssystem für die Berechnung der beiden unbekannten Koeffizienten γ_j für j = 1 und 2

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 240 & 120 \\ 120 & 240 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -840 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-14}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

sowie das endgültige Basis-Polynom $P_{7,1}$ angeschrieben.

$$P_{7,1}(x,y) = x^7 y - \frac{14}{3} x^5 y^3 + \frac{7}{3} x^3 y^5$$

Die beiden y– dominanten biharmonischen Basis-Polynome aus der 8-ten Reihe des „Pascal'schen Dreiecks" gewinnt man durch Vertauschen der Variablen x und y in den Potenztermen der beiden x-dominanten Basis-Polynomen.

Definition aller biharmonischen Polynome der Gruppe b:

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 4-ten „Dreiecks-Reihe“
$P_{4,0} = x^4 - 3x^2y^2$ und $P_{0,4} = y^4 - 3x^2y^2$

Zur 4-ten „Dreiecks-Reihe“ gehören auch die in ${}_{12}^{3}U_{b,h}(x, y)$ einbezogenen biharmonischen Potenzterme x^3y und $x\,y^3$; letztgenannte stehen in der 4-ten „Dreiecks-Reihe“ quasi für das 3. und 4. biharmonische Basis-Polynom.

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 5-ten „Dreiecks-Reihe“
$P_{5,0} = x^5 - 5x^3y^3$ und $P_{4,1} = x^4y - y^3x^2$

$P_{0,5} = y^5 - 5y^3x^2$ und $P_{1,4} = y^4x - x^3y^2$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 6-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{6,0}(x,y) = x^6 - 10x^4y^2 + 5x^2y^4 \quad \textit{und} \quad P_{5,1} = x^5y - \frac{5}{3}x^3y^3$$

$$P_{0,6}(x,y) = y^6 - 10y^4x^2 + 5x^4y^2 \quad \textit{und} \quad P_{1,5} = xy^5 - \frac{5}{3}x^3y^3$$

(Die beiden Polynome $P_{6,0}$ und $P_{0,6}$ gehören eigentlich laut obiger Definition schon zur Gruppe **c** !)

Definition der biharmonischen Polynome in Gruppe c:
Biharmonische „Basis-Polynome“ der Gruppe c lassen sich generell nur aus der Linearkombination mehrerer Potenzterme einer „Dreiecks-Reihe“ (n> 6) aufbauen. (Siehe die weiter oben formulierte Auswahlregel).

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 7-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{7,0}(x,y) = x^7 - 14x^5y^2 + \frac{35}{3}x^3y^4$$

$$P_{6,1}(x,y) = x^6y - \frac{10}{3}x^4y^3 + x^2y^5$$

$$P_{0,7}(x,y) = y^7 - 14y^5x^2 + \frac{35}{3}y^3x^4$$

$$P_{1,6}(x,y) = y^6x - \frac{10}{3}y^4x^3 + y^2x^5$$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 8-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{8,0}(x,y) = x^8 - 21x^6y^2 + 35x^4y^4 - 7x^2y^6$$

$$P_{7,1}(x,y) = x^7y - \frac{14}{3}x^5y^3 + \frac{7}{3}x^3y^5$$

$$P_{0,8}(x,y) = y^8 - 21y^6x^2 + 35y^4x^4 - 7y^2x^6$$

$$P_{1,7}(x,y) = y^7x - \frac{14}{3}y^5x^3 + \frac{7}{3}y^3x^5$$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 9-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{9,0}(x,y) = x^9 - 27x^7y^2 + 63x^5y^4 - 21x^3y^6$$

$$P_{8,1}(x,y) = x^8y - 7x^6y^3 + 7x^4y^5 - x^2y^7$$

$$P_{0,9}(x,y) = y^9 - 27y^7x^2 + 63y^5x^4 - 21y^3x^6$$

$$P_{1,8}(x,y) = y^8x - 7y^6x^3 + 7y^4x^5 - y^2x^7$$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 10-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{10,0}(x,y) = x^{10} - 36x^8y^2 + 126x^6y^4 - 84x^4y^6 + 9x^2y^8$$

$$P_{9,1}(x,y) = x^9y - 9x^7y^3 + \frac{63}{5}x^5y^5 - 3x^3y^7$$

$$P_{0,10}(x,y) = y^{10} - 36y^8x^2 + 126y^6x^4 - 84y^4x^6 + 9x^8y^2$$

$$P_{1,9}(x,y) = y^9x - 9y^7x^3 + \frac{63}{5}y^5x^5 - 3y^3x^7$$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 11-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{11,0}(x,y) = x^{11} - 44x^9y^2 + 198x^7y^4 - \frac{924}{5}x^5y^6 + 33x^3y^8$$

$$P_{10,1}(x,y) = x^{10}y - 12x^8y^3 + \frac{126}{5}x^6y^5 - 12x^4y^7 + x^2y^9$$

$$P_{0,11}(x,y) = y^{11} - 44y^9x^2 + 198y^7x^4 - \frac{924}{5}y^5x^6 + 33y^3x^8$$

$$P_{1,10}(x,y) = y^{10}x - 12y^8x^3 + \frac{126}{5}y^6x^5 - 12y^4x^7 + y^2x^9$$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 12-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{12,0}(x,y) = x^{12} - 55x^{10}y^2 + 330x^8y^4 - 462x^6y^6 + 165x^4y^8 - 11x^2y^{10}$$

$$P_{11,1}(x,y) = x^{11}y - \frac{44}{3}x^9y^3 + \frac{198}{5}x^7y^5 - \frac{132}{5}x^5y^7 + \frac{11}{3}x^3y^9$$

$$P_{0,12}(x,y) = y^{12} - 55y^{10}x^2 + 330y^8x^4 - 462y^6x^6 + 165y^4x^8 - 11y^2x^{10}$$

$$P_{1,11}(x,y) = y^{11}x - \frac{44}{3}y^9x^3 + \frac{198}{5}y^7x^5 - \frac{132}{5}y^5x^7 + \frac{11}{3}y^3x^9$$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 13-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{13,0}(x,y) = x^{13} - 65x^{11}y^2 + \frac{1430}{3}x^9y^4 - 858x^7y^6 + 429x^5y^8 - \frac{143}{3}x^3y^{10}$$

$$P_{12,1}(x,y) = x^{12}y - \frac{55}{3}x^{10}y^3 + 66x^8y^5 - 66x^6y^7 + \frac{55}{3}x^4y^9 - x^2y^{11}$$

$$P_{0,13}(x,y) = y^{13} - 65y^{11}x^2 + \frac{1430}{3}y^9x^4 - 858y^7x^6 + 429y^5x^8 - \frac{143}{3}y^3x^{10}$$

$$P_{1,12}(x,y) = y^{12}x - \frac{55}{3}y^{10}x^3 + 66y^8x^5 - 66y^6x^7 + \frac{55}{3}y^4x^9 - y^2x^{11}$$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 14-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{14,0}(x,y) = x^{14} - 78x^{12}y^2 + 715x^{10}y^4 - 1716x^8y^6 + 1287x^6y^8 - 286x^4y^{10} + 13x^2y^{12}$$

$$P_{13,1}(x,y) = x^{13}y - \frac{65}{3}x^{11}y^3 + \frac{286}{3}x^9y^5 - \frac{858}{7}x^7y^7 + \frac{143}{3}x^5y^9 - \frac{13}{3}x^3y^{11}$$

$$P_{0,14}(x,y) = y^{14} - 78y^{12}x^2 + 715y^{10}x^4 - 1715y^8x^6 + 1287y^6x^8 - 286y^4x^{10} + 13y^2x^{12}$$

$$P_{1,13}(x,y) = y^{13}x - \frac{65}{3}y^{11}x^3 + \frac{286}{3}y^9x^5 - \frac{858}{7}y^7x^7 + \frac{143}{3}y^5x^9 - \frac{13}{3}y^3x^{11}$$

◆ Biharmonische Basis-Polynome der 15-ten „Dreiecks-Reihe“

$$P_{15,0}(x,y) = x^{15} - 90x^{13}y^2 + 975x^{11}y^4 - 2800x^9y^6 + \frac{19305}{7}x^7y^8 - 858x^5y^{10} + 65x^3y^{12}$$

$$P_{14,1}(x,y) = x^{14}y - 26x^{12}y^3 + 143x^{10}y^5 - \frac{1716}{7}x^8y^7 + 143x^6y^9 - 26x^4y^{11} + x^2y^{13}$$

$$P_{0,15}(x,y) = y^{15} - 90y^{13}x^2 + 975y^{11}x^4 - 2800y^9x^6 + \frac{19305}{7}y^7x^8 - 858y^5x^{10} + 65y^3x^{12}$$

$$P_{1,15}(x,y) = y^{14}x - 26y^{12}x^3 + 143y^{10}x^5 - \frac{1716}{7}y^8x^7 + 143y^6x^9 - 26y^4x^{11} + y^2x^{13}$$

Durch die Heranziehung biharmonischer Basis-Polynome höherer Ordnung kann auch in jedem Knoten z.B. die Gleichheit der Biegemomente in der Platte am Übergang zwischen allen dort zusammenstoßenden Elementen sichergestellt werden, und zwar dadurch, daß man in jedem Knoten als weitere Knotenvariable → unbekannte Verformungsgrößen höherer Ordnung wie z.B. die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ bzw. $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$ etc. der Plattenbiegung in die Berechnung einführt.

In [4] findet man z.B. ein rechteckiges Element mit den folgenden 9 Knotenvariablen

$$\left[w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right]$$

an jedem Eckknoten. Die zu den Knotenvariablen gehörigen Formfunktionen hat Hahn unter Zuhilfenahme von Hermite'schen Interpolationspolynomen 5. Grades zusammengestellt. Diese Hermite'schen Interpolationspolynome genügen jedoch nicht der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0.

Grundsätzlich lassen sich Ansatz-Polynome für Formfunktionen, die die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w = 0 erfüllen, nur aus biharmonischen Basis-Polynomen aufbauen. Es ist dabei jedoch wichtig, bei der Auswahl der Basis-Polynome auf die Symmetrie der gewählten Funktion (6) {z.B. zur Diagonalen im Rechteck} zu achten. Im Abschnitt E) werden dazu Beispiele aufgezeigt.

D3) Algorithmus zur Formulierung von partikulären Integralen der inhomogen Plattengleichung B · $\Delta\Delta$ w(x, y) = p (x,y)

Beim Aufbau von partikulären Integralen zur Beschreibung der Belastungsfunktion p (x, y) einer inhomogenen Plattengleichung stützen wir uns – wie schon bei der Definition von biharmonischen Basis-Polynomen in Abschnitt D2) – auf die Struktur des Pascalschen Dreiecks für zweidimensionale Polynome **n**-ter Ordnung. Wir greifen hierbei auf Vorarbeiten für die Definition von biharmonischen Basis-Polynomen weiter oben zurück. Dort haben wir die „Dreiecks-Reihen" in drei Gruppen a), b) und c) unterteilt, weil diese sich unterschiedlich bei der Definition von biharmonischen Basis-Polynomen verhalten; ähnliches gilt auch hier bei der Generierung von partikulären Integralen.

In der Gruppe a) erfüllen alle im biharmonischen Polynom

$$^{3}_{12}U_{y,x}(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 x^3 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3$$

zusammengefaßten Potenzterme die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta$ w(x, y) = 0**;** d.h. mit diesen Termen kann man folglich kein partikuläres Integral für die inhomogene Plattengleichung formulieren. Dagegen erfüllen alle die in den Gruppen b) und c) zusammengefaßten Potenzterme nicht die Bipotentialgleichung. Werden all diese Terme in den Laplaceschen Operator

$$\Delta\Delta \ldots = \frac{\partial^4 \ldots}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \ldots}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \ldots}{\partial y^4}$$

eingesetzt, geben sie uns folglich die Möglichkeit, ein partikuläres Integral zu beschreiben, das der speziellen Belastungsfunktion p (x, y) der vorgegebenen äußeren Belastung einer Platte bzw. eines Plattenelementes identisch entspricht. Jeder Potenzterm in den „Dreiecks-Reihen" **n** > 3 steht für ein spezifisches partikuläres Integral der inhomogenen Plattengleichung.

- Aus den drei Potenztermen x^4, x^2, y^2 sowie y^4 der **4**-ten Reihe erhalten wir drei partikuläre Integrale für eine konstante Plattenbelastung p_a:

$$B \cdot \Delta\Delta\, x^4 = p(x,y) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot p_a = 24 \cdot p_a$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, x^2 y^2 = p(x,y) = 2 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) \cdot p_a = 8 \cdot p_a$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, y^4 = p(x,y) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot p_a = 24 \cdot p_a$$

- Aus den sechs Potenztermen x^5, $x^4 y$, $x^3 y^2$, $x^2 y^3$, xy^4 sowie y^5 der **5**-ten Reihe lassen sich nachfolgende nur in (x oder y) eindimensionale partikuläre Integrale mit den in folgenden Punkten vorgegebenen Parametern der äußeren Plattenbelastung formulieren:

$x = 1 \Rightarrow p_a^x;\ y = 1 \Rightarrow p_a^y$

mit den Belastungsparametern p_a^x, p_a^y, *und* $p_a^{x,y}$

$$B \cdot \Delta\Delta\, x^5 = p(x,y) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x \cdot p_a^x = 120 \cdot x \cdot p_a^x$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, x^4 y = p(x,y) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot y \cdot p_a^y = 24 \cdot y \cdot p_a^y$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, x^3 y^2 = p(x,y) = 2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1) \cdot x \cdot p_a^x = 24 \cdot x \cdot p_a^x$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, x^2 y^3 = p(x,y) = 2 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2) \cdot y \cdot p_a^y = 24 \cdot y \cdot p_a^y$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, xy^4 = p(x,y) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x \cdot p_a^x = 24 \cdot x \cdot p_a^x$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, y^5 = p(x,y) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot y \cdot p_a^y = 120 \cdot x \cdot p_a^y$$

- Aus den drei Potenztermen $x^5 y$, $x^3 y^3$ sowie $y^5 x$ in der **6**-ten Reihe des Pascal'schen Dreiecks lassen sich nachfolgende nur zweidimensionale partikuläre Integrale mit den in folgenden Punkten vorgegebenen Parametern der äußeren Plattenbelastung formulieren:

$x = y = 1 \Rightarrow p_a^{x,y}$ mit dem Belastungsparameter $p_a^{x,y}$

$$B \cdot \Delta\Delta\, x^5 y = p(x,y) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot p_a^{x,y} = 120 \cdot x \cdot y \cdot p_a^{x,y}$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, x^3 y^3 = p(x,y) = 2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2) \cdot x \cdot y \cdot p_a^{x,y} = 72 \cdot x \cdot y \cdot p_a^{x,y}$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, y^5 x = p(x,y) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot p_a^{x,y} = 120 \cdot x \cdot y \cdot p_a^{x,y}$$

Weiterhin lassen sich aus den vier Potenztermen x^6, $x^4 y$, $x^2 y^4$ sowie y^6 der 6-ten „Dreiecks-Reihe" in (x oder y) rein quadratische eindimensionale partikuläre Integrale mit einem bzw. zwei Potenztermen und den in den nachfolgenden Punkten vorgegebenen Parametern der äußeren Plattenlasten formulieren:

$x = 1 \Rightarrow p_a^{x^2};\ y = 1 \Rightarrow p_a^{y^2};$

mit den Belastungsparametern $p_a^{x^2}$ *und* $p_a^{y^2}$

$$B \cdot \Delta\Delta\, x^6 = p(x,y) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot p_a^{x^2} = 360 \cdot x^2 \cdot p_a^{x^2}$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, x^4 y^2 = p(x,y) = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot y^2 \cdot p_a^{y^2} + 2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot x^2 \cdot p_a^{x^2}$$
$$= 24 \cdot y^2 \cdot p_a^{y^2} + 48 \cdot x^2 \cdot p_a^{x^2}$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, x^2 y^4 = p(x,y) = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot x^2 \cdot p_a^{x^2} + 2 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3) \cdot y^2 \cdot p_a^{y^2}$$
$$= 24 \cdot x^2 \cdot p_a^{x^2} + 48 \cdot y^2 \cdot p_a^{y^2}$$
$$B \cdot \Delta\Delta\, y^6 = p(x,y) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot p_a^{y^2} = 360 \cdot y^2 \cdot p_a^{y^2}$$

- Für alle „Dreiecks-Reihen" **n** > 6 lassen sich aus jedem Potenzterm jeder Reihe durch Einsetzen in die drei Differentialoperatoren des Laplaceschen Operators partikuläre Integrale mit einem oder mit zwei bzw. maximal mit drei Potenztermen generieren. Aus den beiden ersten und den beiden letzten Potenztermen jeder **n**-ten Reihe erhält man je ein partikuläres Integral mit nur einem Potenzterm (n - 4) - ten Grades in (x oder y); aus dem dritten und vierten sowie drittletzten und viertletzten Term in jeder **n**-ten Reihe ergeben sich immer je ein partikuläres Integral mit zwei Potenztermen; alle weiteren Potenzterme aus jeder „Dreiecksreihe" liefern immer ein partikuläres Integral mit drei Potenztermen.

Für die strenge Lösung der inhomogenen Plattengleichung mit einer beliebigen Flächenbelastung läßt sich das dafür erforderliche spezifische partikuläre Integral in den meisten Fällen in Form einer Kombination formulieren, die aus den oben abgeleiteten partikulären „Basis"- Integralen zu bilden ist.

D4) Leistungsbeschreibung biharmonischer Polynome und deren Verwendung in der Elastomechanik

Betrachten wir alle im Abschnitt **D2)** aufgeführten biharmonischen Polynome $P_{b,h}$ sowie die im biharmonischen Polynom ${}_{12}^{3}U_{b,h}$ (x, y) zusammengefaßten biharmonischen Potenzterme der „Dreiecks-Reihen" **n** < 4, so können wir feststellen,

- daß alle biharmonischen Polynome **n**-ter Ordnung mit **n** > 1 unvollständige zweidimensionale Polynome darstellen;
- daß alle biharmonischen Polynome **n**-ter Ordnung ab **n** > 0 im Koordinatennullpunkt (x = 0; y = 0) den Funktionswert $P_{b,h} = 0$ besitzen;
- daß die ersten drei Potenzterme ($a_1 + a_2x + a_3y$) in ${}_{12}^{3}U_{b,h}$ (x, y) ebene Flächen definieren, wobei a_1 die zur (x, y)-Ebene parallele Ebene, a_3 y eine um die y-Achse gedrehte und a_2 x eine um die x-Achse gedrehte Ebene darstellen;
- daß alle Potenzterme in biharmonischen Polynomen **n**-ter Ordnung mit **n** > 1 im Bereich eines Quadrates mit den Begrenzungskoordinaten $-1 \le x \le 1$ und $-1 \le y \le 1$ immer einen Funktionswert $\overline{P}_{b,h} \le |1|$ besitzen, daß jedoch immer außerhalb dieses Quadrates ihr Funktionswert $\overline{P}_{b,h} \ge |1|$ wird; je größer **n** ist, desto schneller und stärker steigt oder fällt der Funktionswert beidseits der Begrenzungen des Quadrates, gleiches gilt dort auch für den Tangentenanstieg in Richtung der x- bzw. y-Achse.

Da im Bauwesen die Abmessungen einer Platte (z.B. a und b bei rechteckigen Platten) fast immer > 1 [m] sind, ist es aus numerischen Gründen (Differenzen großer Zahlen) nicht angebracht, mit den in der (x,y) - Ebene definierten biharmonischen Polynomen die statischen und geometrischen Randwerte für Plattentragwerke mit der geforderten Genauigkeit zu berechnen. Letzteres bedeutet, daß für die Berechnung der statischen und geometrischen Größen eines Plattentragwerkes nur biharmonische Polynome sowie partikuläre Integrale der vollständigen Plattengleichung, die in einem dimensionsfreien Koordinatensystem (ξ, η) definiert sind, verwendet werden sollten!

Für die Abbildung aller Punkte der (x,y)-Ebene in der (ξ, η) - Ebene wählen wir den Algorithmus für konforme Abbildungen, weil dieser Algorithmus immer winkel- und maßstabstreue Abbildungen liefert. Der Verzerrungsfaktor ist somit von der Richtung unabhängig, d.h. er ist für alle Punkte in der (x,y)- Ebene konstant.

Für die Festlegung des Verzerrungsfaktors empfiehlt es sich, die absolut größte aus den beiden x- oder y-Koordinaten desjenigen Platteneckpunktes heranzuziehen, dessen Abstand **r** zum Koordinatennullpunkt von allen Eckpunkten des die Platte begrenzenden Polygons am größten ist. Wir bezeichnen die größte (x- oder y-) Koordinate aus allen Eckpunktkoordinaten mit $\overline{d}_{x,y}$. Vor der Berechnung des Verzerrungsfaktors $\frac{1}{d}$ sollte der numerische Wert von $\overline{d}_{x,y}$ noch um dem Faktor δ ($\delta \rightarrow$ ca. 10 bis 30%) vergrößert werden, damit mit $d = \overline{d}_{x,y} \cdot \delta$ alle Koordinaten der Platte innerhalb des oben beschriebenen Quadrates mit den Begrenzungskoordinaten $-1 \le \xi \le 1$ und $-1 \le \eta \le 1$ abgebildet werden und damit auch alle Eckpunkte der zu berechnenden Platte in der (ξ, η)-Ebene genügend weit weg von den obigen Qadraträndern zu liegen kommen.

Mit d werden alle Punkte der (x,y)-Ebene in der (ξ, η)-Ebene mit den dimensionsfreien Koordinaten $\xi = \frac{x}{d}$ und $\eta = \frac{y}{d}$ eindeutig abgebildet.

Bei konformen Abbildungen bleiben die konstanten Koeffizienten in allen biharmonischen Polynomen auch in der (ξ, η)-Ebene erhalten. Dies bedeutet, daß in allen im Abschnitt D2) angeschriebenen biharmonischen Polynomen für deren Verwendung in der (ξ, η)-Ebene die Koordinaten (x bzw. y) in allen Potenzterm nur durch die Koordinaten (ξ bzw. η) auszutauschen sind. Als Beispiel hierfür wird nachfolgend die konforme Abbildung aller biharmonischen Polynome 8. Ordnung angezeigt:

$$P_{8,0}(\xi,\eta) = \xi^8 - 21\xi^6\eta^2 + 35\xi^4\eta^4 - 7\xi^2\eta^6$$

$$P_{7,1}(\xi,\eta) = \xi^7\eta - \frac{14}{3}\xi^5\eta^3 + \frac{7}{3}\xi^3\eta^5$$

$$P_{0,8}(\xi,\eta) = \eta^8 - 21\eta^6\xi^2 + 35\eta^4\xi^4 - 7\eta^2\xi^6$$

$$P_{1,7}(\xi,\eta) = \eta^7\xi - \frac{14}{3}\eta^5\xi^3 + \frac{7}{3}\eta^3\xi^5$$

Die Berechnung aller statischen und geometrischen Größen erfolgt ausschließlich in der (ξ, η)-Ebene. Alle biharmonischen Polynome $\mathbf{P}_{b,h}(\xi, \eta)$ sowie alle Potenzterme im Polynom ${}_{12}^{3}U_{b,h}$ (ξ, η) , die für die Erfüllung der statischen und geometrischen Randbedingungen herangezogen werden, genügen voll der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta\, w(\xi, \eta) = 0$; alle partikulären Integrale zur Beschreibung der äußeren Belastung müssen die Plattengleichung $B \cdot \Delta\Delta\, w(\xi, \eta) = p(\xi, \eta)$ erfüllen.

Die Darstellung der Plattenbiegung und deren Ableitungen für die Bestimmung von statischen Größen in der (x,y)-Ebene erhalten wir aus den entsprechenden Größen der (ξ, η)-Ebene wie folgt:

$$w(x,y) = d^4 \cdot w(\xi,\eta) \qquad \text{Plattenbiegung}$$

$$w_x(x,y) = d^3 \cdot w_\xi(\xi,\eta)$$

$$w_y(x,y) = d^3 \cdot w_\eta(\xi,\eta)$$

$$w_{xx}(x,y) = d^2 \cdot w_{\xi\xi}(\xi,\eta)$$

$$w_{yy}(x,y) = d^2 \cdot w_{\eta\eta}(\xi,\eta)$$

$$w_{xxy}(x,y) = d \cdot w_{\xi\xi\eta}(\xi,\eta)$$

$$w_{yyx}(x,y) = d \cdot w_{\eta\eta\xi}(\xi,\eta)$$

D5) Genauigkeitsbetrachtungen und Wege zur Erhöhung der Genauigkeit

Wie die beiden Beispiele – für eine allseitig frei drehbar gelagerten Platte - im Anhang (*siehe Seite 29*) zeigen, werden die in Abschnitt **A)** postulierten Annahmen und Voraussetzungen für den

in dieser Arbeit vorgeschlagenen Lösungsweg für das Randwertproblem eines Plattentragwerkes voll erfüllt.

- Die exakte Lösung der Plattengleichung $B \cdot \Delta\Delta\, w(x,y) = p(x,y)$ läßt sich mit jeder gewünschten Genauigkeit durch den nachfolgenden Lösungsansatz für die Biegefläche (mit der Plattensteifigkeit B = 1)

  $$\mathbf{w}(x, y) = w_{inhom}(x, y) + w_{hom}(x, y) \rightarrow \mathbf{w}(x, y) = w_{part\,Int}(x, y) + \sum_i \alpha_i \cdot \mathbf{P}_{b,h}(x, y)$$

  mit Hilfe einer Potenzreihe, gebildet aus zweidimensionalen biharmonischen Basis-Polynomen, darstellen.

- Vorgegebene geometrische und statische Randbedingungen werden in allen ausgewählten Randpunkten (Interpolationspunkten) exakt erfüllt. Durch eine Erhöhung der Anzahl dieser Interpolationspunkte und eventuell einer schärferen Formulierung der statischen Randbedingungen durch Einbeziehung weiterer unbekannter statischer Randgrößen, die durch höhere Ableitungen der Biegefläche definiert sind, wird die Approximation aller Randbedingungen stetig näher an die exakte Lösung des vorgegebenen Randwertproblems herangeführt.

- Durch eine konforme Abbildung der zu berechnenden Platte in der (ξ, η)- Ebene mit Hilfe des Verzerrungsfaktors $\frac{1}{d}$, der die Platte in einem Quadrat mit den Grenzen $[-1 \leq (\xi = \frac{x}{d}) \leq 1]$ bzw. $[-1 \leq \eta = \frac{y}{d} \leq 1]$ abbildet, wird sichergestellt, daß bei Nutzung von biharmonischen Basis–Polynomen höherer Ordnung die Berechnung der Randwerte an allen Interpolationspunkten numerisch stabil abläuft. Die Berechnung der Freiwerte α_i liefert stets Ergebnisse, mit denen eine exakte Ermittlung der Schnittgrößen – ausgenommen der Randbereich der Platte – möglich ist. Abweichungen der statischen Schnittgrößen von deren exakten Werten im Randbereich werden in vielen Fällen jedoch so klein sein, daß diese bei der Bemessung der Platte schon bei einer Anzahl Interpolationspunkte (einschließlich der beiden Eckpunkte) ≥ 5 auf dem angrenzenden Plattenrand vernachlässigt werden können; denn die wellenförmigen „Ausbuchtungen“ , die sich in der graphische Darstellung der statischen Größen entlang der Plattenränder zeigen, existieren dort nur innerhalb eines schmalen Plattenbereiches. Die Breite dieses Randbereiches entspricht in etwa dem (0.7 bis 0.8)-fachen Abstand zwischen zwei dort vorhandenen Interpolationspunkten.

- Biharmonische Polynome beschreiben ihren Funktionswert in allen Punkten sowohl der (x,y)-Ebene als auch der (ξ, η)-Ebene. Demzufolge unterliegt die geometrische Figur der zu berechnenden Platte nur einer einzigen Einschränkung, nämlich der, daß die Platte keine Aussparungen und keine Lager im Innern einschließen darf. Die Plattenumrandung muß entweder abschnittsweise durch einen Polygonzug oder einer beliebigen Kurve beschrieben sein.

- In allen zur x- bzw. y-Achse parallelen Plattenrändern sollte der Abstand zwischen zwei Interpolationspunkten nicht konstant gewählt werden, sondern von der Randmitte hin zu beiden Randenden stets kleiner werden. Durch eine solche Maßnahme wird die Genauigkeit der Biegefläche sowie die der Schnittgrößen entlang des betrachteten Plattenrandes erhöht. Letzteres resultiert aus dem Tatbestand, daß der Funktionsverlauf aller statischen Größen an jedem geraden Rand, der zur ξ- bzw. η-Achse parallel verläuft, sich immer nur als eindimensionales Interpolationspolynom darstellt. Aus der Lagrangeschen Interpolation ist bekannt, daß eindimensionale Interpolationspolynome bei gleich großen Stützpunktabständen Kurven darstellen, die in allen weiter weg vom Koordinatenursprung liegenden Interpolationsabschnitten meist große „Amplituden“ besitzen - d.h. dort schlechtere Interpolationswerte liefern. Dieser Tatbestand ist nur dann zu umgehen, wenn die Abstände zwischen zwei Stützstellen variabel und zu den Enden der gesamten Interpolationsstrecke hin kleiner werdend angeordnet werden.

- Es fördert die Genauigkeit der Darstellung von Biegeflächen und Schnittgrößen, wenn in allen rechteckigen oder kreisähnlichen Platten der Koordinatenursprung im Plattenmittelpunkt liegt, bei nur einseitig symmetrischen Platten auf der Symmetrieachse angeordnet ist und bei allen anderen Plattenfiguren möglichst nahe am Plattenschwerpunkt postiert wird.

- Das partikuläre Integral für den inhomogenen Lösungsanteil im oben allgemein gehaltenen Lösungsansatz für die Plattengleichung kann auch durch nicht zweidimensionale Polynomterme - wie z.B. eine singuläre Funktion der Einflußfläche einer statischen Größe - beschrieben werden. Wegen des gewählten konstanten Verzerrungsfaktors für die konformen Abbildungen von Flächenfiguren in der gesamten (ξ, η)-Ebene lassen sich mit dem in dieser Arbeit aufgezeigten Lösungsweg sowohl Einflußflächen für alle statischen Größen nicht rechteckiger Platten als auch Formfunktionen für beliebig begrenzte finite Elemente sowie Platten und Plattenelemente mit unterschiedlichen Randbedingungen an den einzelnen Plattenrändern berechnen. Alle Einflußflächen bzw. Formfunktionen sind exakt, weil letztere die Bipotentialgleichung exakt erfüllen. Sie liefern in der praktischen Berechnung gut verwendbare Randbedingungen bzw. Übergangsbedingungen zu den benachbarten Elementen - wie das zweite Beispiel im Anhang zeigt. Schon bei einer Anordnung von nur drei Elementknoten zwischen zwei Eckknoten erzielt man eine gute Genauigkeit.

- Es ist in manchen Fällen günstiger, die Freiwerte α_i im oben aufgezeigten Lösungsansatz nicht exakt mit Hilfe der Interpolationsbedingungen aus den Gleichungen (8) bis (10) zu berechnen, sondern diese mit dem Algorithmus (12) vom Minimum der Fehlerquadratsumme mit den Formeln (11) bis (13) zu bestimmen, um so eine möglichst günstige Approximation für die Randbedingungen entlang der einzelnen Plattenränder zu erhalten. Weiterhin ist es empfehlenswert, die doppelte oder einfache Symmetrie der Platte auszunutzen, um dadurch alle Arbeiten für die Berechnung der Freiwerte α_i aus den Randbedingungen einer viertel oder halben Platte mit geringerem Arbeitsaufwand durchführen zu können.

E) Anhang

Rechteckplatte: Beispiel 1

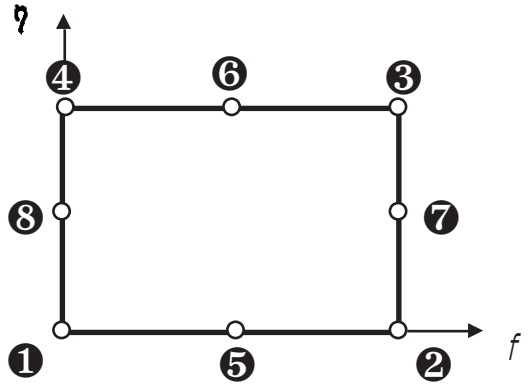


Bild 3 : Rechteckplatte (Beipiel 1)
(Nur in allen gekennzeichneten Punkten werden die Randbedingungen definiert)

Abmessung: 8 x 8m^2; Abbildungsfaktor für die (ξ, η)-Ebene ➞ 1:12; Plattensteifigkeit $B = 1$

Als Randpunkte werden die vier Eckpunkte sowie die Mittelpunkte in allen vier Plattenrändern definiert. Als Belastung wird die gleichmäßige Fächenlast p = *konstant* zugrunde gelegt. Der Nullpunkt des orthogonalen Koordinatensystems liegt im linken Eckpunkt des unteren Plattenrandes.

Als Randbedingung wird gewählt: $w_{Rand} = 0$ für alle Knotenpunkte (8 Freiwerte) sowie:

$\frac{\partial^2 w_{Rand}}{\partial \xi^2} = 0$ für allePlattenränder x=0 und x = 8 (6 Freiwerte) und
$\frac{\partial^2 w_{Rand}}{\partial \eta^2} = 0$ für alle Plattenränder y = 0 und y = 8 (6 Freiwerte)

Die Anzahl der unbekannten Freiwerte ergibt sich somit zu 20.

Die beiden biharmonischen Polynome in $P_{14}(\xi, \eta)$ werden nicht für die Erfüllung der Randwerte an den Plattenrändern herangezogen, weil als partikuläres Integral $P_0(\xi, \eta) = \xi^2 \eta^2$ für die inhomogene Plattengleichung $\Delta\Delta$ w = 8 · p gewählt wird.

Zusammenstellung aller für die Erfüllung der Randwertbedingung herangezogenen biharmonischen Basis - Polynome:

$$P_{12}(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^3 + a_{10}\eta^3$$
$$a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi\eta^3$$
$$P_{14}(\xi,\eta) = a_{13}(\xi^2\eta^2 - \tfrac{1}{3}\xi^4) + a_{14}(\xi^2\eta^2 - \tfrac{1}{3}\eta^4)$$
$$P_{18}(\xi,\eta) = a_{15}(\xi^3\eta^2 - \tfrac{1}{5}\xi^5) + a_{16}(\xi^2\eta^3 - \tfrac{1}{5}\eta^5) + a_{17}(\xi^3\eta^2 - \eta^4\xi) + a_{18}(\xi^2\eta^3 - \xi^4\eta)$$
$$P_{22}(\xi,\eta) = a_{19}(\xi^3\eta^3 - \tfrac{3}{5}\xi^5\eta) + a_{20}(\xi^3\eta^3 - \tfrac{3}{5}\xi\eta^5) + a_{21}(\xi^6 - 10\xi^4\eta^2 + 5\xi^2\eta^4)P_s(\xi,\eta)$$
$$+ a_{22}(\eta^6 - 10\xi^2\eta^4 + 5\xi^4\eta^2)$$

$P_s(\xi, \eta)$ ist die Lösung der vollständigen Plattengleichung mit der Plattensteifigkeit $B = 1$.

$Ps(\xi, \eta) = P_0(\xi, \eta) + P_{12}(\xi, \eta) + P_{18}(\xi, \eta) + P_{22}(\xi, \eta)$

Partikuläres Integral $P_0(\xi, \eta) = \xi^2\eta^2$ für die inhomogene Plattengleichung $\Delta\Delta$ w = 8 · p

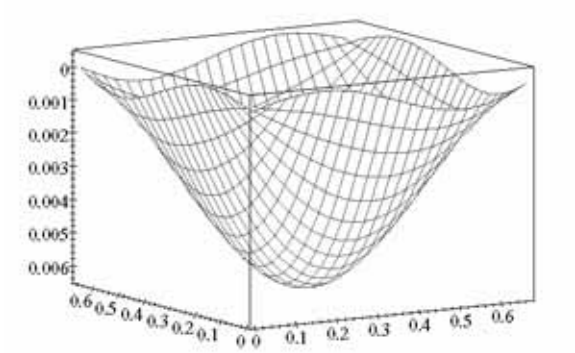
$P_0(\xi, \eta) = \xi^2\eta^2$ $\qquad \frac{\partial^4 P_0}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = 8$

Für die Erfüllung der Randbedingungen wählen wir das biharmonische Polynom $P_R(\xi, \eta)$

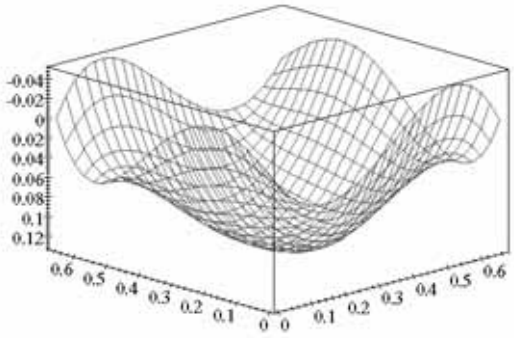
$P_R(\xi, \eta) = P_{12}(\xi, \eta) + P_{18}(\xi, \eta) + P_{22}(\xi, \eta)$

Alle graphischen Darstellungen werden nachfolgend in der (ξ, η)-Ebene aufgezeichnet.

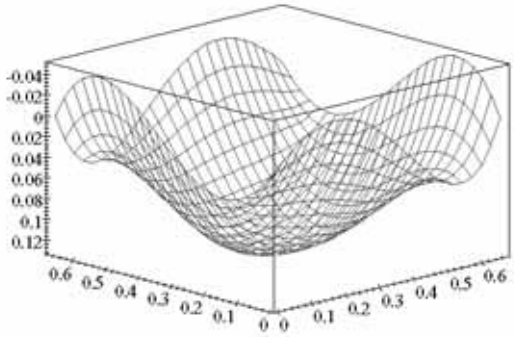
➡ Biegefläche der Platte $P_S(\xi, \eta)$ aus der Flächenbelastung 8 · p



➡ Plattenkrümmung $\frac{\partial^2}{\partial n^2}$ [$-Ps(\xi, \eta)$] für die Flächenbelastung 8· p

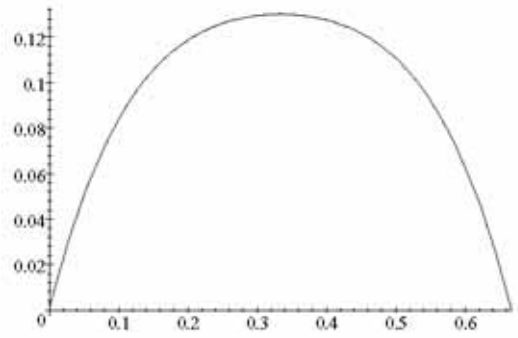


➡ Plattenkrümmung $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ [$-Ps(\xi, \eta)$] für die Flächenbelastung 8· p



➡ Plattenkrümmung $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$ $[-P_S(\xi,\eta)]$ bzw. $\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ $[-P_S(\xi,\eta)]$

in beiden Platten-Mittellinien infolge der Flächenbelastung $8 \cdot p$



Vergleich der Lösungsergebnisse mit den in der Literatur vorliegenden Berechnungen.

Es werden zum Vergleich hier die von Karl Girkmann (Flächentragwerke 6. Auflage 1963 Seite 200 etc.) auf der Basis einer schnell konvergierenden Reihe aufgezeigten Ergebnissen herangezogen.

1.) Biegemomente $m_x = m_y$ in Plattenmitte aus einer gleichmäßigen Flächenlast p:

a) für $\mu = 0.3$ ➡ $0.047536308 \cdot 8^2 \cdot p$
Bei Karl Girkmann findet man dafür denWert : $0.0475 \cdot 8 \cdot p$

b) für $\mu = 0$ ➡ $0.03656639 \cdot 8^2\, p$
Bei Karl Girkmann findet man dafür denWert: $0.0368 \cdot 8^2 \cdot p$.

➡ Die Ergebnisse für die Biegemomente stimmen also aus beiden Berechnungsmethoden gut überein.

2.) B-fache Durchbiegung in Plattenmitte aus einer gleichmäßigen Flächenlast p:
$B \times w = 0.0040521266 \times 8^4 \times p$
Bei Karl Girkmann findet man denWert : $0.00406 \times 8^4 \times p$, dieser Wert wurde mit nur einem Reihenglied erzielt.

➡ Das Ergebnis für die B-fache Durchbiegung stimmt aus beiden Berechnungsmethoden gut überein.

Rechteckplatte: Beispiel 2

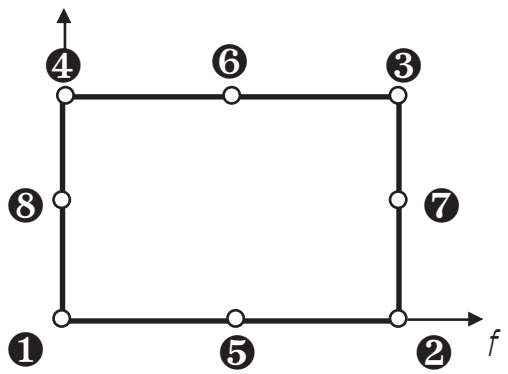


Bild 4: Rechteckplatte (Beipiel 2)
(In allen durch einen Punkt gekennzeichneten Rändern werden in Abweichung von Beispiel 1 zusätzlich die Randbedingungen definiert.)

Das Beispiel 2 unterscheidet vom Beispiel 1 sich nur durch eine größere Anzahl von Knotenpunkten entlang eines jeden Plattenrandes.

Abmessung: 8 x 8m^2; Abbildungsfaktor für die (ξ,η)-Ebene ➡ 1:12; Plattensteifigkeit $B = 1$

Als Randpunkte werden die vier Eckpunkte sowie die Mittelpunkte in allen vier Plattenrändern definiert. Als Belastung wird die gleichmäßige Fächenlast p = *konstant* zugrunde gelegt. Der Nullpunkt des orthogonalen Koordinatensystems liegt im linken Eckpunkt des unteren Plattenrandes.

Als Randbedingung wird gewählt: *wRand* _ 0 für alle Knotenpunkte, (16 Freiwerte) sowie:

$\frac{\partial^2 w_{Rand}}{\partial\xi^2} = 0$ für alle Knoten in den Plattenrändern x=0 und $x = 8$ (10 Freiwerte) und

$\frac{\partial^2 w_{Rand}}{\partial\eta^2} = 0$ für alle Knoten in den Plattenrändern $y = 0$ und $y = 8$ (10 Freiwerte)

Die Anzahl der unbekannten Freiwerte ergibt sich somit zu 20.

Die beiden biharmonischen Polynome in $P_{14}(\xi,\eta)$ werden nicht für die Erfüllung der Randwerte an den Plattenrändern herangezogen, weil als partikuläres Integral $P_0(\xi,\eta) = \xi^2\,\eta^2$ für die inhomogene Plattengleichung $\Delta\Delta\, w = 8 \cdot p$ gewählt wird.

Zusammenstellung aller für die Erfüllung der Randwertbedingung herangezogenen biharmonischen Basis - Polynome:

$$P_{12}(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^3 + a_{10}\eta^3 + a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi\eta^3$$

$$P_{14}(\xi,\eta) = a_{13}(\xi^2\eta^2 - \tfrac{1}{3}\xi^4) + a_{14}(\xi^2\eta^2 - \tfrac{1}{3}\eta^4)$$

$$P_{18}(\xi,\eta) = a_{15}(\xi^3\eta^2 - \tfrac{1}{3}\xi^5) + a_{16}(\xi^2\eta^3 - \tfrac{1}{3}\eta^5) + a_{17}(\xi^3\eta^2 - \eta^4\xi) + a_{18}(\xi^2\eta^3 - \xi^4\eta)$$

$$P_{22}(\xi,\eta) = a_{19}(\xi^5\eta^3 - \tfrac{1}{3}\xi^5\eta) + a_{20}(\xi^3\eta^3 - \tfrac{1}{3}\xi\eta^5) + a_{21}(\xi^6 - 10\xi^4\eta^2 + 5\xi^2\eta^4) + a_{22}(\eta^6 - 10\xi^2\eta^4 + 5\xi^4\eta^2)$$

$$P_{24}(\xi,\eta) = a_{23}(\xi^7 - 14\xi^5\eta^2 + \tfrac{35}{3}\xi^3\eta^4) + a_{24}(\eta^7 - 14\eta^5\xi^2 + \tfrac{35}{3}\xi^4\eta^3)$$

$$P_{26}(\xi,\eta) = a_{25}(\xi^6\eta - \tfrac{10}{3}\xi^4\eta^3 + \xi^2\eta^5) + a_{26}(\eta^6\xi - \tfrac{10}{3}\eta^4\xi^3 + \eta^2\xi^5)$$

$$P_{28}(\xi,\eta) = a_{27}(\xi^8 - 21\xi^6\eta^2 + 35\xi^4\eta^4 - 7\xi^2\eta^6) + a_{28}(\eta^8 - 21\eta^6\xi^2 + 35\eta^4\xi^4 - 7\eta^2\xi^6)$$

$$P_{30}(\xi,\eta) = a_{29}(\xi^7\eta - \tfrac{14}{3}\xi^5\eta^3 + \tfrac{7}{3}\xi^3\eta^5) + a_{30}(\eta^7\xi - \tfrac{14}{3}\eta^5\xi^3 + \tfrac{7}{3}\eta^3\xi^5)$$

$$P_{32}(\xi,\eta) = a_{31}(\xi^9 - 27\xi^7\eta^2 + 63\xi^5\eta^4 - 21\xi^3\eta^6) + a_{32}(\eta^9 - 27\eta^7\xi^2 + 63\eta^5\xi^4 - 21\eta^3\xi^6)$$

$$P_{34}(\xi,\eta) = a_{33}(\xi^8\eta - 7\xi^6\eta^3 + 7\xi^4\eta^5 - \xi^2\eta^7) + a_{34}(\eta^8\xi - 7\eta^6\xi^3 + 7\eta^4\xi^5 - \eta^2\xi^7)$$

$$P_{36}(\xi,\eta) = a_{35}(\xi^{10} - 36\xi^8\eta^2 + 126\xi^6\eta^4 - 84\xi^4\eta^6 + 9\xi^2\eta^8) + a_{36}(\eta^{10} - 36\eta^8\xi^2 + 126\eta^6\xi^4 - 84\eta^4\xi^6 + 9\eta^2\xi^8)$$

$$P_{38}(\xi,\eta) = a_{37}(\xi^9\eta - 9\xi^7\eta^3 + \tfrac{63}{5}\xi^5\eta^5 - 3\xi^3\eta^7) + a_{38}(\eta^9\xi - 9\eta^7\xi^3 + \tfrac{63}{5}\eta^5\xi^5 - 3\eta^3\xi^7)$$

Partikuläres Integral $P_0(\xi,\eta) = \xi^2\,\eta^2$ für die inhomogene Plattengleichung $\Delta\Delta\, w = 8 \cdot p$

$$P_0(\xi,\eta) = \xi^2\,\eta^2; \rightarrow\ 2 \cdot \frac{\partial^4 P_0}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = 8$$

$P_S(\xi,\eta)$ ist die Lösung der vollständigen Plattengleichung mit der Plattensteifigkeit $B = 1$

$$P_{s1}(\xi,\eta) = P_0(\xi,\eta) + P_{12}(\xi,\eta) + P_{18}(\xi,\eta) + P_{22}(\xi,\eta)$$

$$P_{s2}(\xi,\eta) = P_{24}(\xi,\eta) + P_{26}(\xi,\eta) + P_{28}(\xi,\eta) + P_{30}(\xi,\eta) + P_{32}(\xi,\eta) + P_{34}(\xi,\eta) + P_{36}(\xi,\eta) + P_{38}$$

$$P_s(\xi,\eta) = P_{s1}(\xi,\eta) + P_{s2}(\xi,\eta)$$

Für die Erfüllung der Randbedingungen wählen wir das biharmonische Polynom $P_R(\xi,\eta)$

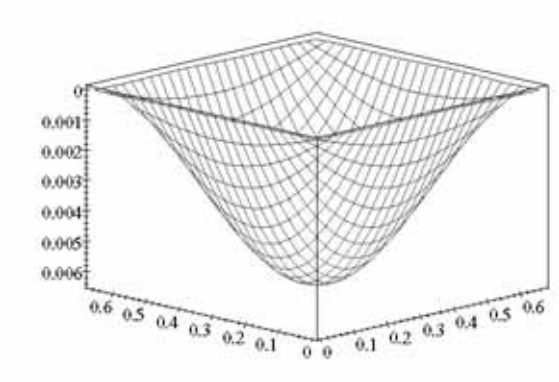
$$P_{R1}(\xi,\eta) = P_{12}(\xi,\eta) + P_{18}(\xi,\eta) + P_{22}(\xi,\eta)$$

$$P_{R2}(\xi,\eta) = P_{24}(\xi,\eta) + P_{26}(\xi,\eta) + P_{28}(\xi,\eta) + P_{30}(\xi,\eta) + P_{32}(\xi,\eta) + P_{34}(\xi,\eta) + P_{36}(\xi,\eta) + P_{38}$$

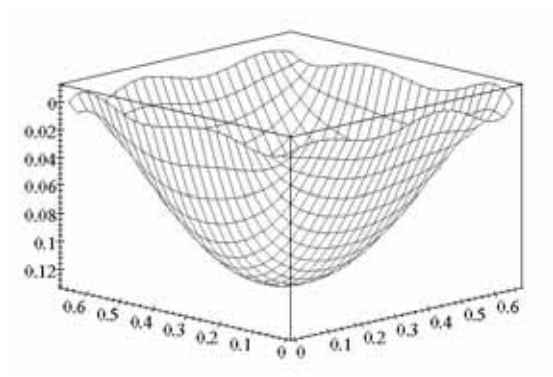
$$P_R(\xi,\eta) = P_{R1}(\xi,\eta) + P_{R2}(\xi,\eta)$$

Alle graphischen Darstellungen werden nachfolgend in der (ξ,η)-Ebene aufgezeichnet.

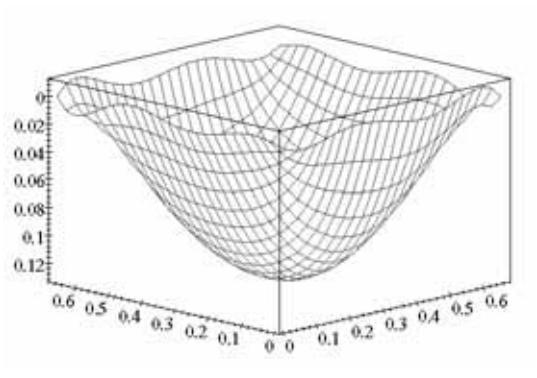
➡ Biegefläche der Platte $-P_S(\xi, \eta)$ aus der Flächenbelastung $8 \cdot p$



➡ Plattenkrümmung $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}[-Ps(\xi, \eta)]$ für die Flächenbelastung $8 \cdot p$

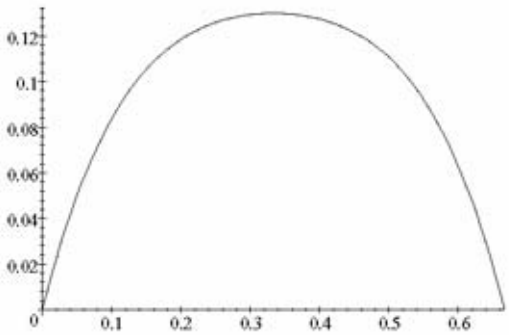


➡ Plattenkrümmung $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[-Ps(\xi, \eta)]$ für die Flächenbelastung $8 \cdot p$

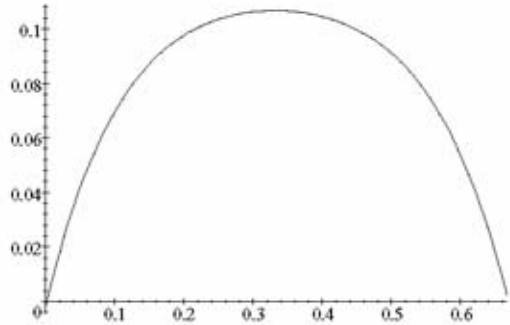


➡ Plattenkrümmung $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[-Ps(\xi, \eta)]$ bzw. $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}[-Ps(\xi, \eta)]$

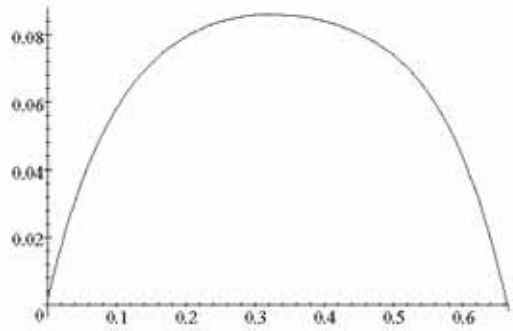
in beiden Platten-Mittellinien infolge der Flächenbelastung $8 \cdot p$



➡ Plattenkrümmung $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}[-Ps(\xi, \eta)]$ in den Geraden $\xi = 0.2$ bzw. $\xi = 0.467$ für die Flächenbelastung $8 \cdot p$



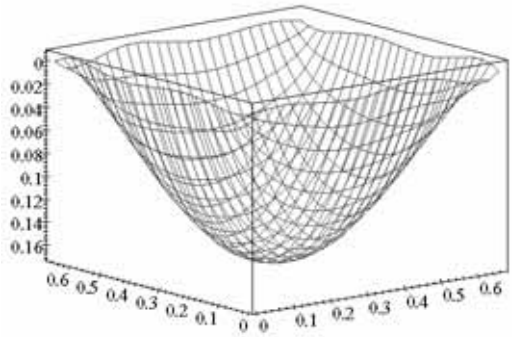
➡ Plattenkrümmung $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}[-Ps(\xi, \eta)]$ in den Geraden $\xi = 0.15$ bzw. $\xi = 0.517$ für die Flächenbelastung $8 \cdot p$



➡ Biegemoment $m_{s\eta}(\xi, \eta)$ in der (ξ, η)-Ebene mit der Plattensteifigkeit $B = 1$

$$m_{s\eta}(\xi, \eta) = -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}[Ps(\xi, \eta) + 0.3 \bullet \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Ps(\xi, \eta)]$$

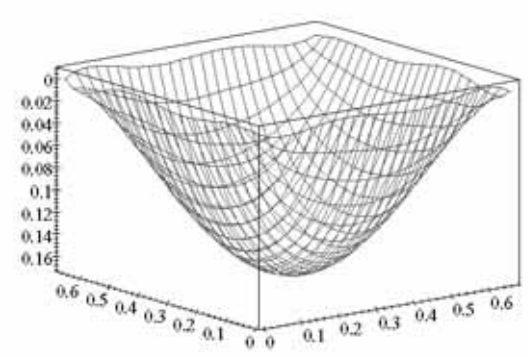
aus der Flächenbelastung $8 \bullet p$



➡ Biegemoment $m_{s\xi}(\xi, \eta)$ in der (ξ, η)-Ebene mit der Plattensteifigkeit $B = 1$

$$m_{s\eta}(\xi, \eta) = -[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Ps(\xi, \eta) + 0.3 \bullet \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} Ps(\xi, \eta)]$$

aus der Flächenbelastung $8 \bullet p$



Vergleich der Lösungsergebnisse mit den in der Literatur vorliegenden Berechnungen.

Es werden zum Vergleich hier die von Karl Girkmann (Flächentragwerke: 6. Auflage 1963 Seite 200 etc.) auf der Basis einer schnell konvergierenden Reihe gewonnenen Ergebnisse herangezogen.

1.) Biegemomente $m_x = m_y$ in Plattenmitte aus einer gleichmäßigen Flächenlast p:

a) für $\mu = 0.3 \rightarrow 0.047857347 \cdot 8^2 \cdot p$
Bei Karl Girkmann findet man dafür denWert : $0.0475 \cdot 8^2 \cdot p$

b) für $\mu = 0 \rightarrow 0.036813344 \cdot 8^2 p$
Bei Karl Girkmann findet man dafür denWert $0.0368 \cdot 8^2 \cdot p$

➡ Die Ergebnisse für die Biegemomente stimmen also aus beiden Berechnungsmethoden gut überein.

2.) B-fache Durchbiegung in Plattenmitte aus einer gleichmäßigen Flächenlast p:
$B \bullet w = 0.0040592296 \bullet 84 \bullet p$
Bei Karl Girkmann findet man denWert : 0.00406 x 84 x p, dieser Wert wurde mit nur einem Reihenglied erzielt.

➡ Das Ergebnis für die B-fache Durchbiegung stimmt aus beiden Berechnungsmethoden gut überein.

Literaturhinweise

[1] S. Pickardt : Fehlerabschätzung bei ausgewählten finiten Elementen. Dissertation. 1987. Uni Dortmund

[1.1] F. Hartmann und S. Pickardt: Fehler bei finiten Elementen. Bauingenieur 60 (1985) 463 -468

[2] Tagungsberichte: Finite Elemente, Anwendungen in der Baupraxis. Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin

[3] E. Stein, B. Seifert, W. Rust: Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Bericht - Nr. F 94/1, Oktober 1994

[4] H. G. Hahn: Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre. Akademische Verlagsgesellschaft, Kaiserslautern im Frühjahr 1975

[5] H. Ebel: Finite Elemente in der Baustatik. Vorlesung Winter - Semester 1994/95, Institut für Statik TH Darmstadt

[6] A. Pucher: Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten. Ingenieur – Archiv XII, 1941

[6.1] A. Pucher: Über die Berechnung der Einflußfelder ebener Platten. Berichte der Gesellschaft von Freunden der technischen Hochschule Berlin. 1940, Seite 60 ff.

[7] Holl: Analysis of Thin Rectangular Plates Supported on Opposite Edges, Bull. 129 Jowa Engineering Experiment Station 1936

[8] D. Rüdiger: Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie zweidimensionaler elastischer Kontinua. Ingenieur - Archiv XXIX, 1960, Seite 115 – 124

[9] W. Prager: Variational Prinzips for Elastic Plates relaxed Continuity Requirements. International Journal of Solids and Structures 1968, Vol. 4, pp. 837

[10] H. Bufler: Die verallgemeinerten Variationsgleichungen der dünnen Platte bei Zulassung diskontinuierlicher Schnittkräfte u. Verschiebungsgrößen

[11] K. Girkmann: Flächentragwerke. 6. Auflage 1963 Springer Verlag, Wien

[12] F. Tölke: Über Spannungszustände in dünnen Rechteckplatten. Ingenieur – Archiv V., 1934, Seite 187 ff.

[13] W. Ritz: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. f. reine und angew. Math. 135 (1909) 1- 61

Kontakt

Dr.-Ing. Werner Schäfer, Humboldtstr. 13, D 41749 Viersen, eMail: 021626488-0001@t-online.de

APL - Germany e.V.

http://www.apl-germany.de

Walter Schleinitz

Symmetrie in der Musik

Dieser Artikel soll daran erinnern, dass Mathematik auch in einfachen musikalischen Gebilden waltet. Das hat auch schon ANDREAS SPEISER mit einer Bemerkung in seinem Buch „Die Theorie der endlichen Gruppen von endlicher Ordnung“ [l] festgestellt.

Red.

1 Einführung, Historisches

Betrachten wir zunächst den Terminus *„Symmetrie“*. Nach dem GRIMMschen Wörterbuch [2] aus dem Jahre 1942 hat das Wort Symmetrie nachweisbar seit dem 16. Jahrhundert die Bedeutung Ebenmaß, Gleichmaß, richtiges Verhältnis und bezeichnet dort zunächst *„im eigentlichen Gebrauch, namentlich der bildenden Kunst, insbesondere der Architektur ... allgemein das ebenmäßige Verhältnis der Teile eines Körpers, eines Kunstwerkes zueinander und zum Ganzen, die harmonische Übereinstimmung der Teile eines Ganzen“* (so zitiert bei GÜNTHER MASSENKEIL [3]). Und MASSENKEIL fährt fort: *„Neben dieser ursprünglichen und allgemeinen Bedeutung, die im wesentlichen auch mit dem lateinischen symmetria im 16. und 17. Jahrhundert übereinstimmt, ..., kommt im Laufe des 18. Jahrhunderts eine neue und speziellere Bedeutung in Gebrauch. Nunmehr versteht man unter Symmetrie auch „im engeren Sinne das gleichmäßige Verhältnis zweier (oder mehrerer) Gegenstände in Bezug auf ein in ihrer Mitte liegendes Objekt, auf einen Mittelpunkt, eine Mittellinie, zu der sie in entgegengesetzten Richtungen gleichartig hingeordnet liegen“*[2]. Wann exakt diese Bedeutungsveränderung passiert, ist nicht genau feststellbar. In der Encyclopedie von 1765 wird der Begriff noch wie oben allgemein definiert. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts, so [3] S. 7, ist der Begriff schon fest in der mathematischen Terminologie verankert. Und weiter bemerkt MASSENKEIL in [3] auf Seite 7: *„Die Verengung des Bedeutungsumfanges des Wortes Symmetrie, die sich somit im Bereich der bildenden Kunst und im Wortschatz der Mathematik feststellen läßt, •••, ist auch im musikalischen Bereich zu beobachten.“*

Und weiter [3] auf Seite 39: *„Symmetrie ist als Gegenstand der Kompositionslehre seit dem beginnenden 17. Jahrhundert greifbar. Zur gleichen Zeit tauchen in der Musik selbst die ersten Zeugnisse symmetrischer Formgebung auf.“* Der große Musiktheoretiker HUGO RIEMANN (1849-1919) befasst sich ebenfalls mit Fragen der Symmetrie in der Musik, ist - wie er immer wieder selbst betont - hierbei aber von den Kompositionslehrern der Mitte des 18. Jahrhunderts wie H. CHR. KOCH abhängig.

Einen weiteren Höhepunkt stellen die 20er Jahre dieses Jahrhunderts dar. WOLFGANG GRAESER ordnet J. S. BACHS Kunst der Fuge unter anderem auch unter Berücksichtigung von Symmetrievorstellungen [4] und führt auch Symmetrieuntersuchungen durch.

2 Elementare Symmetriebetrachtungen bei Tönen

Wir folgen hier den Ausführungen von R. CLAUS [5]. Unter einer 12-zähligen Drehachse versteht man eine Halbachse, die beim Durchlaufen einer vollen Umdrehung zwölfmal einrasten kann. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Einrastungen soll gleich groß sein, beträgt also 30°. $\{C_{12}\}^n$ soll bedeuten, dass eine vertikale positive Halbachse im mathematisch negativen Sinne n-mal um p/6 = *arc30°* weiter gedreht wird. Den Schnittpunkten dieser gedrehten Halbachse mit dem Kreis gebe man die Namen der Töne einer Oktave: C, Cis, D, ... Die Elemente $\{C_{12}\}^n$ bilden bezüglich der Operation des n-fachen Weiterdrehens um 30° eine kommutative Gruppe, die zyklische Gruppe C_{12}.

l. Die Operationen $\{C_{12}^{12}\}^n$ mit $n = 0,1,2,$ ... liefern das Einselement. Sie transformieren die Rosette nur in sich selbst. Das Einselement ist also die identische Abbildung. Die Gruppe ist von der Ordnung 12.

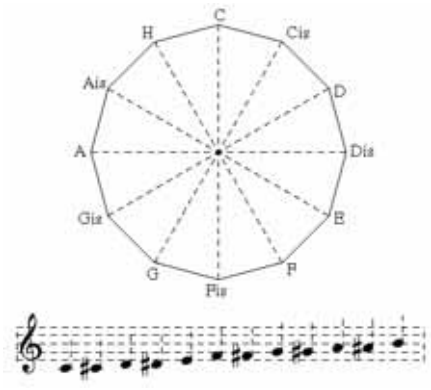


Abb. l

2. Führt man Drehoperationen $\{C_{12}^2\}^n = \{C_6\}^n$ mit $n = 0,1,2,$ • • • aus, also nur Rotationen um Winkel *n •2/6* p , so erhält man Ganztonskalen. Es gibt zwei unabhängige, in sich geschlossene zyklische Untergruppen, die beiden möglichen Ganztonskalen. $\{C_6\}^n$ hat die Ordnung 6.

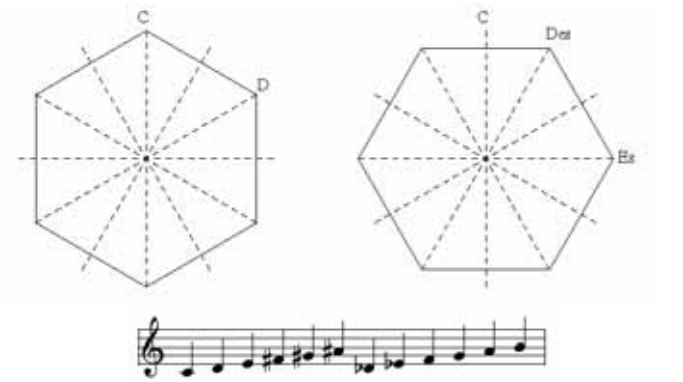


Abb. 2

3. Drehoperationen $\{C_{12}^{3}\}^{n} = \{C_4\}^{n}$ mit $n = 0,1,2, \bullet\bullet\bullet$ führen auf drei zyklische Untergruppen. Sie entsprechen den drei Typen verminderter Septakkorde. $\{C_4\}^{n}$ hat die Ordnung 4.

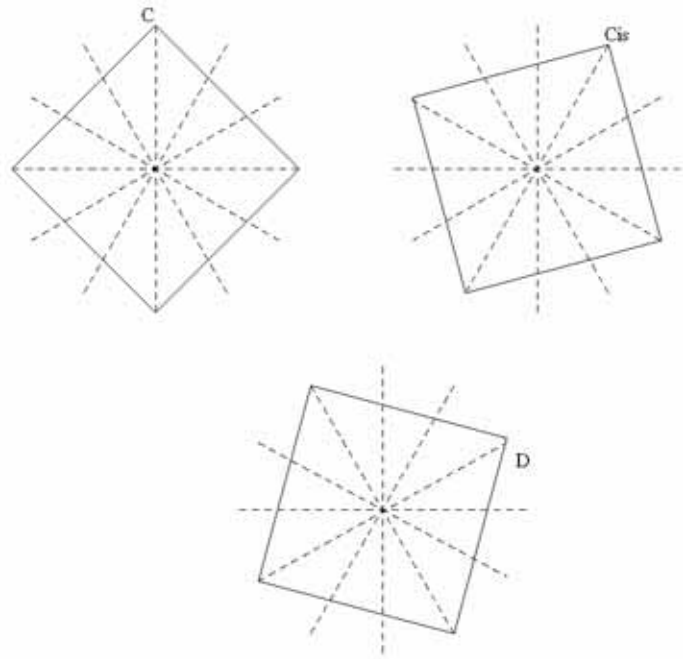


Abb. 3

4. Drehoperationen $\{C_{12}^{4}\}^{n} = \{C_3\}^{n}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ führen auf vier zyklische Untergruppen. Sie entsprechen den vier verschiedenen Dreiklängen mit nur großen Terzen, Ordnung 3.

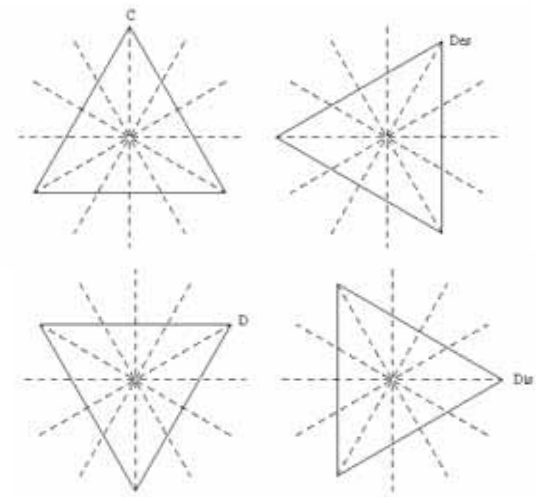


Abb.4.

5. Drehoperationen $\{C_{12}^{6}\}^{n} = \{C_2\}^{n}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ ergeben sechs zyklische Untergruppen, die den sechs Tritonusintervallen entsprechen. $\{C_2\}^{n}$ hat die Ordnung 2.

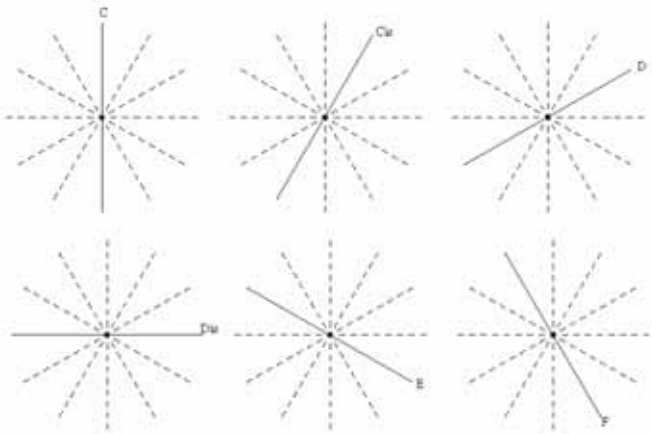


Abb.5

Wenn man von *C* beginnend die Achse jeweils gleich um 5/6 p= *arc 150°* im negativen mathematischen Sinne weiterdreht, erhält man die Töne C, F, B, Es, ..., den sogenannten Quartenzirkel. Seine Töne sind dadurch gekennzeichnet, dass sie Grundtöne von Tonarten sind, die, von links nach rechts gelesen, sich von ihrem Vorgänger um ein vorgezeichnetes b unterscheiden: C-Dur kein b, F-Dur ein b, B-Dur zwei b, usw.
Den Quintenzirkel erhält man, indem man von C beginnend die Achse jeweils gleich um 7/6 p = *arc210°* im negativen mathematischen Sinn weiterdreht. Es sind die Töne C, G, D, ...Sie haben die Eigenart, dass sie Grundtöne von Tonarten sind, die, von links nach rechts gelesen, sich von ihrem Vorgänger um ein vorgezeichnetes Kreuz unterscheiden: C-Dur kein Kreuz, G-Dur ein Kreuz, D-Dur zwei Kreuze, usw.

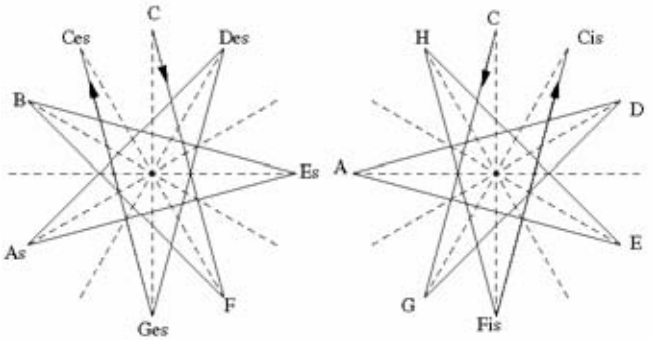
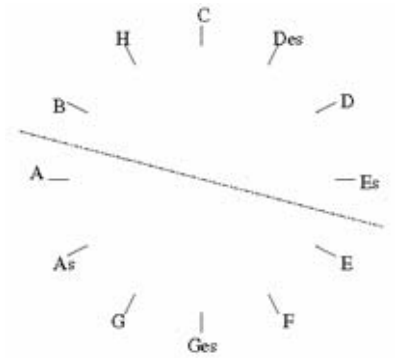


Abb.6

Wir modernen Menschen kennen im allgemeinen nur noch zwei Tongeschlechter: Dur und Moll. Diese sind aber erst im 16. Jahrhundert aufgekommen. Vorher waren seit dem 8. Jahrhundert die sogenannten Kirchentonarten üblich.
Jede Dur-Tonart ist dadurch gekennzeichnet, dass auf zwei Ganztonschritte ein Halbtonschritt und nach weiteren drei Ganztonschritten wieder ein Halbtonschritt folgt. Bei einer „harmonischen Molltonart“ ist der zweite und der fünfte Schritt ein Halbtonschritt.
Weiterhin kann man feststellen, dass die Grundakkorde der Dur-Tonleiter zu denen der Moll-Tonleiter axialsymmetrisch sind, und zwar z.B.:



T = Tonika, D = Dominante, S = Subdominante

C-Dur	T	c	e	g	D	h	d	g	S	c	f	a
c-Moll	T	g	es	c	S	as	f	c	D	g	d	b

Abb.7

Ordnet man die sieben Töne einer Dur-Tonleiter gleichmäßig auf dem Kreis an, so sind die Töne der Tonika zu sich selbst axialsymmetrisch, die der Dominante zu denen der Subdominante.

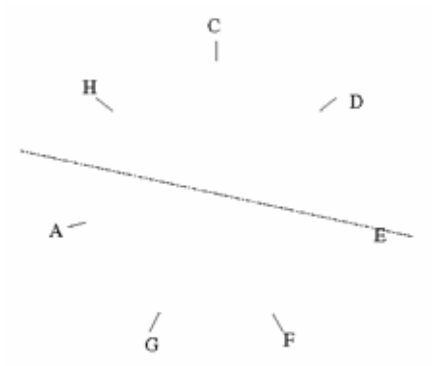


Abb.8

3 Symmetrieelemente in der kompositorischen Gestaltung

Zur Untersuchung dieses Aspekts wird ein sogenannter musikalischer Raum wie folgt definiert: Den drei Achsen eines metrischen 3-dimensionalen Raums werden die folgenden Größen zugeordnet:

Der Horizontalachse ordnet man nach rechts hin wachsend die Zeit *t* zu, der Vertikalachse nach oben wachsend die Frequenz, der Achse nach vorn wachsend die Lautstärke.

Es erhebt sich. die Frage, ob in einem solchen 3-dimensionalen Raum die Musik vollständig darstellbar ist. Nimmt man z.B. den Ton *g* mit der Zählzeit 2 mit einer gewissen Lautstärke, so ist seine Darstellung eine gewisse Strecke parallel zur Horizontalachse. Man muss aber feststellen, dass bei dieser Darstellung die Klangfarbe, die durch die Stärke der beteiligten Obertöne verursacht wird,, entstanden durch das spezielle Instrument, das den Ton *g* spielt, vernachlässigt wird. In dem musikalischen Raum kann man aber gewisse geometrische Gebilde musikalisch deuten:

1. Jeder Strecke parallel zur t-Achse entspricht ein Ton konstanter Lautstärke.
2. Jedem Kurvenstück parallel zur Zeit-Lautstärken-Ebene entspricht ein Ton, der sich eventuell in der Lautstärke verändert.
3. Kurvenstücke parallel zur Frequenz-Lautstärken-Ebene lassen sich nicht deuten.
4. Kurvenstücke parallel zur Frequenz-Zeit-Ebene, aber nichtparallel zur Zeitachse ergeben musikalische Gebilde, die man auf dem Klavier nicht, auf anderen Instrumenten aber spielen kann.

Bezüglich der drei Achsen sollen nun die drei bekannten Symmetrieoperationen Translation, Spiegelung und Drehung durchgeführt und gedeutet werden:

l. Der Translation bezüglich der Lautstärken-Achse wird das *Crescendo* bzw. *Decrescendo* *(p < f, f > p)* zugeordnet.
2. Für die Translation bezüglich der Zeitachse ist wohl das bekannteste Beispiel die Motivwiederholung im *Bolero* von MAURICE RAVEL oder die Tonwiederholung.

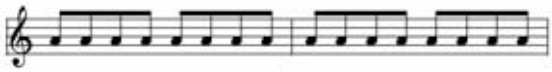


Abb.9

3. Translationen bezüglich der Prequenzrichtung sind Parallelführungen oder Modulationen.
   (a) Alle Arten der Parallelführung kommen in der musikalischen Literatur vor.

Abb.10

   (b) Wichtig sind auch die Oktavparallelen im Sinne der Bassverstärkung „ *Violoncello e Contrabasso*“ und
   (c) das Mixturregister der Orgel (=Stimmenverstärkung durch Quintenparallelen).
   (d) Möglich ist auch ein gleichzeitiges Auftreten von Translationen in Zeit und Frequenz. Das entspricht einer Diagonalbewegung parallel zur Zeit-Frequenz-Ebene im musikalischen Raum.
   (e) Ist diese Art der Translation dann gleichzeitig noch mit Crescendo bzw. Decrescendo verbunden, so entspricht das einer Bewegung in Richtung einer Raumdiagonalen.
4. Spiegelung an der Frequenz-Zeit-Ebene entspricht hin- und rückläufigen Bewegungen in Dynamikrichtung. Sie sehen bekanntlich so aus: *P <f> P, f >P< f.*
5. Spiegelung an der Dynamik-Zeit-Ebene. Es entsteht musikalisch gesprochen die sogenannte Gegenbewegung.

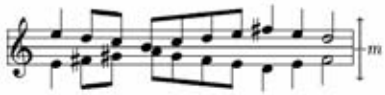


Abb. 11

Durch die Gegenbewegung wird der Schwerpunkt eines musikalischen Satzes erhalten. Daraus ergibt sich, dass die Gegenbewegung eine bedeutende Rolle im Kontrapunkt hat.
Die Verbindung der Spiegelung an der Dynamik-Zeit-Ebene mit zeitlicher Translation heißt musikalisch *Umkehrung*. Manchmal wird eine Umkehrung von Themen mit einer Ver-

setzung um eine Quinte nach unten bzw. um eine Quarte nach oben verbunden. Das ist natürlich keine Spiegelsymmetrie im isometrischen Sinne.

6. Die Spiegelung an der Frequenz-Dynamik-Ebene heißt *Krebs*.

Abb.12

Im 15. und 16. Jahrhundert ist dieses kompositorische Element noch verhältnismäßig häufig. Später wird es als Irrweg, Künstelei oder Spielerei abgetan, erlangt aber in der *Zwölfton-Musik* wieder Bedeutung. Es erhebt sich nun die Frage: Ist die zeitliche Umkehrung wirklich eine Spiegelung? Oder: Ist die Tonfolge von Abbildung 13 spiegelsymmetrisch?

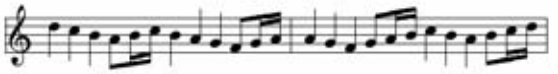


Abb.13

R. CLAUS zitiert eine Bemerkung von PIERRE CURIE: „Die Dissymmetrie schafft erst das Phänomen". Bezogen wird dieser Satz auf physikalische Eigenschaften von Kristallen. Angewandt auf die Kunst: Die ideale Symmetrie kann leicht langweilig werden. Weiter nach R. CLAUS Seite 90 unten: „-Das *trifft ganz besonders für Kunst zu. Der Reiz handgemalten Porzellans liegt bekanntlich in den kleinen Störungen der Symmetrie, die beim maschinellen Druck nicht auftreten. Das Wechselspiel zwischen Ordnung und Unordnung erzeugt die Spannung. Wird aber der Faktor der Unordnung überbewertet, so ist der Hintergrund der Ordnung bald nicht mehr erkennbar. Dies zu vermeiden, ist eine wesentliche Voraussetzung, die bei der Durchführung von Symmetriebetrachtungen an Kunstobjekten immer beachtet werden muss.*"

7. Drehung um die Dynamikachse. Beispiele für zweizählige Eirehachsen: Triller, Tonleitern, Arpeggien, wie in Abbildung 14 dargestellt. Man beachte die mit x gekennzeichneten Drehachsen, aber auch die kleinen Dissymmetrien.

Abb.14

8. Drehung um die Zeitachse. Nimmt man zweizählige Drehachsen, so ergeben sich die bereits behandelten Spiegelungen an der Zeitachse. Der doppelte Kontrapunkt bzw. die zyklische Vertauschung zweier Stimmen in der Interpretation als zweizählige Drehachse weicht deutlich von der Spiegelung an der Zeitachse ab. Der doppelte Kontrapunkt kann als Translation und anschließende Drehung um die Zeitachse angesehen werden.

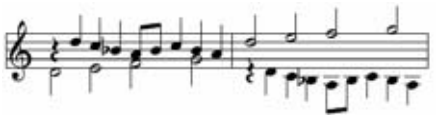


Abb.15

4 Streifenklassen bei der Beschreibung musikalischer Abläufe

Nachdem wir nun die elementaren Operationen Translation, Spiegelung und Drehung im musikalischen Raum untersucht haben, können wir feststellen, dass das gleichzeitige Aultreten mehrerer elementarer Symmetrieelemente zu übergeordneten Aussagen bezüglich der Symmetrie führt, nämlich zur Zuordnung der Objekte zu Streifenklassen bzw. Punktgruppen. Es lässt sich zeigen, dass Frequenzumfang und Spielraum der Dynamik relativ beschränkt sind, die zeitliche Dauer im Prinzip nicht. Damit ist die Möglichkeit einer Zuordnung zu Streifenklassen streckenweise und Punktgruppen lokal gegeben. Es gibt 7 einseitige und 24 zweiseitige Streifenklassen. Es lassen sich Notenbeispiele für alle einseitigen Streifenklassen angeben, und R. CLAUS zeigt, dass es auch Notenbeipiele für zweiseitige Streifenklassen gibt. Die Entsprechung der Musiksymbolisierungen zu den einseitigen Streifenklassen mit den Bezeichnungen nach SHUBNIKOV und KOPTSIK [6] ist in Abbildung 16 dargestellt. Aus Platzgründen kann nicht zu jeder einseitigen Streifenklasse ein Notenbeispiel hier mitgeteilt werden. Der Leser sei auf [5] verwiesen.

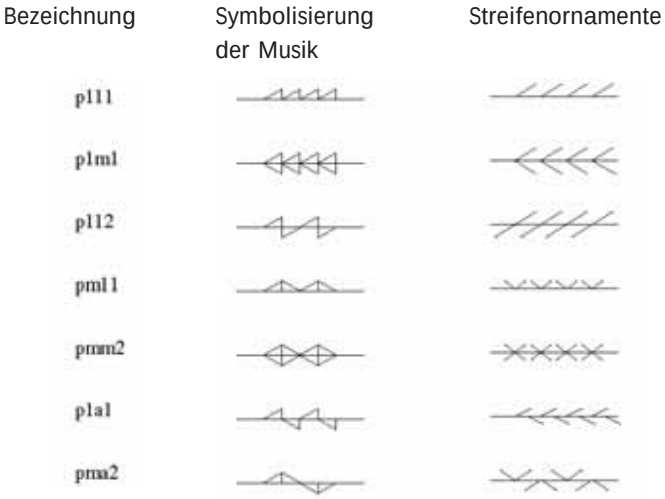


Abb.16

Zu p111 lassen sich die Präludien in C-Dur und c-Moll des Wohltemperierten Klaviers von J.S. BACH angeben.

Abb. 17

Beispiele zu p1m1 sind bei BACH selten, bei BEETHOVEN und BRAHMS häufig. Dies zeigt ein Beispiel aus dem Orgelkonzert G-Dur nach VIVALDI von J.S. BACH.Abb.23

Das Thema der gis-Moll Fuge Wohltemperiertes Klavier II hat die Symmetrie pm11. Diese Streifenklasse ist gekennzeichnet durch das Vorhandensein nur vertikaler Spiegelebenen. Drei davon fallen im Beispiel unmittelbar mit den Taktstrichen zusammen. Das Festhalten an einer strengen Isometriedefinition würde jede Symmetrie beseitigen.

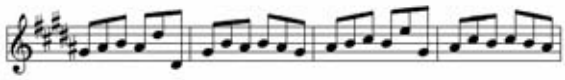


Abb. 19

5 Bachs Kunst der Fuge

Wir haben feststellen können, dass die Musik Symmetrien in den Tonschritten und an mancherlei anderen Stellen aufweist. Zum Schluss soll ein Werk von BACH hinsichtlich der Symmetrie untersucht werden: *Die Kunst der Fuge.* Es handelt sich um das letzte, um das größte und auch das schwierigste Werk von BACH. Lange Zeit wurde in der Musikwelt die Meinung vertreten, dass BACH damit kein Werk geschaffen habe, das je zur Aufführung kommen sollte, sondern dass es ein Lehrwerk sein sollte. Selbst RIEMANN schreibt noch: *„Die Kunst der Fuge — als Ganzes betrachtet — ist deshalb in der Tat kein eigentliches Kunstwerk, sondern ein Schulwerk“.* Die Aufführungspraxis war mit Schwierigkeiten verbunden, da Teile fehlten und der Rest ungeordnet war. Ursache für dieses liegt in der Verwirrung, die durch BACHS Tod eingetreten war. *„Die Vollendung der Ausgabe scheint man dem Stecher überlassen zu haben, indem man ihm alle auf das Werk bezüglichen Manuskripte aus dem Nachlass übergab“, so* WOLFGANG GRAESER [4], Seite 7. *„Zwar wurden in Theorie und Praxis von* RUST und RIEMANN unter anderem *Vorschläge zu einer Umordnung gemacht, aber sie alle entbehren der Folgerichtigkeit, Vollständigkeit und des Beweises, stürzen auch zum Teil die gesicherten Teile des Werkes um. Deswegen sind sie unhaltbar* [4], Seite 8. Der hier schon zweifach zitierte WOLFGANG GRAESER[1], ein junger, sehr begabter Mann, hat siebzehnjährig im Jahre 1923 das Werk so geordnet und zwar unter anderem auch gerade auf Grund gewisser Symmetrieuntersuchungen, dass es von Thomaskantor STRÄUBE dann auch in dieser Form aufgeführt wurde. Und diese Aufführungspraxis ist m.W. als üblich beibehalten worden. STRÄUBE äußerte dazu: *„Die Lebendigmachung der Kunst der Fuge ist sein Ruhm und macht ihn unsterblich“.* Es ist hier nicht der Platz, die Gedankengänge von WOLFGANG GRAESER vollständig darzustellen. Ausgehend einerseits vom sogenannten Berliner Autograph, einer zusammenhängenden älteren Niederschrift eines Teils der Fugen in anderen Fassungen und in anderer Aufstellung und andererseits mehreren losen Blättern, die Teile des Stechmanuskripts darstellen, kommt GRAESER zu seiner Anordnung.

BACHS Kunst der Fuge besteht aus 19 Fugen über ein und dasselbe Thema und dessen Varianten. GRAESER in [4], Seite 26: *„Der Ablauf (des Themas* /der Verf./*) ist völlig symmetrisch. Er besteht aus zwei Hälften, welche sich um das cis als gemeinsames Zentrum herumlegen. Was im ersten Teile entfaltet zu werden scheint, wird im zweiten wieder zusammengerollt.“* Die Abbildung 20 bringt die Spiegelbildlichkeit des Themas bzgl. einer durch eis gedachten vertikalen Achse zum Ausdruck. Die Abbildung 21 zeigt zu dem bereits genannten Thema ein solches, das aus dem ersten durch horizontale Spiegelung an dem Zwischenraum zwischen erster und zweiter Notenlinie von unten (=*f*') - also durch Umkehrung - hervorgegangen ist. Es findet ebenso Verwendung wie das erste. Fugen mit diesem Spiegelthema nennen wir kurz Spiegelfugen. Sie werden von uns symbolisiert durch einen nach oben geöffneten Bogen, während die Fugen mit dem Ausgangsthema mit nach unten geöffneten Bögen dargestellt werden. Die Abbildung 22 zeigt Varianten zu dem Thema. Die Abbildung 23 veranschaulicht das Wesentliche des Themas. Die Abbbildung 24 gibt eine symbolische Darstellung des Berliner Autographs und der Aufstellung der Kunst der Fuge nach WOLFGANG GRAESER wieder.

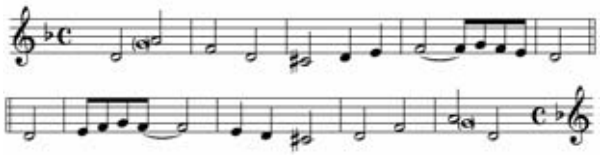


Abb. 20

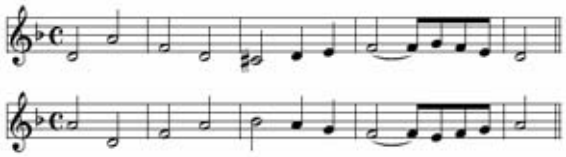


Abb.21

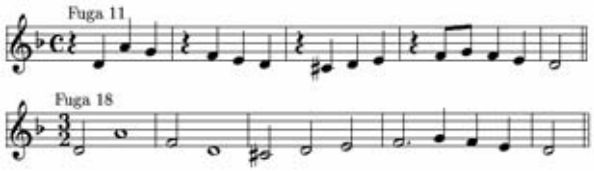


Abb.22

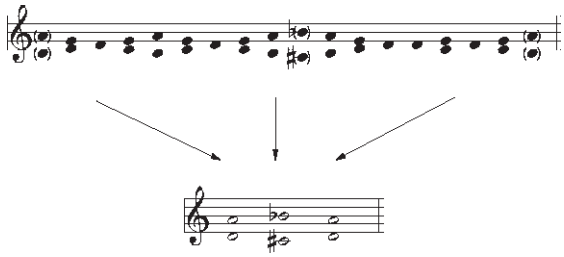


Abb. 23

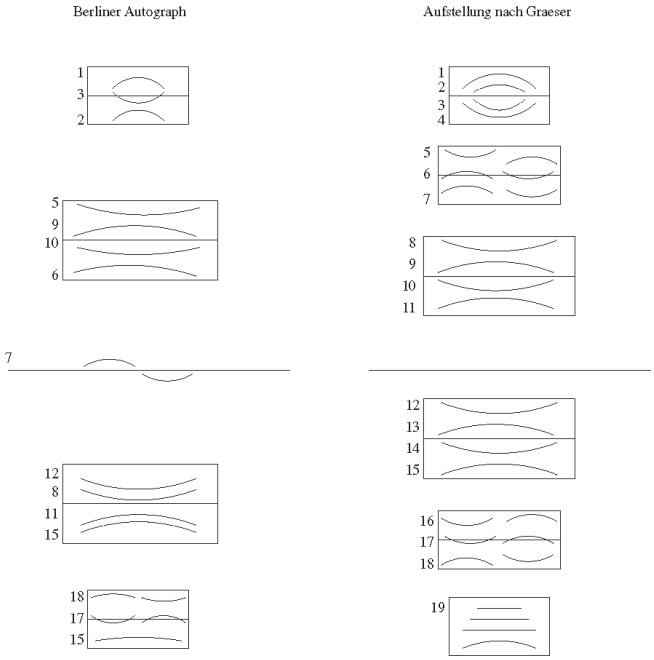


Abb. 24

1 hier die wichtigsten Lebensdaten, nach [10] und [11]: 1906 geb. in Zürich, 1928 gest. in Berlin (Freitod). Mit 17 Jahren legte er sein Abitur ab. Dazu mußte die besondere Genehmigung des preu-ßischen Kultusministeriums eingeholt werden. Seine hohe künstlerische Begabung zeigte sich auch darin, dass 1919 bereits Gemälde von ihm ausgestellt wurden. Nach dem Abitur studierte er in Berlin vor allem Mathematik, daneben Physik, Musikwissenschaft, orientalische Sprachen (u.a. Chinesisch). Nach 6 Semestern promovierte er erfolgreich. Er erkennt die engen Beziehungen zwischen Mathe-matik und Musik, zerbricht aber offensichtlich an der Spannweite zwischen beiden Wissenschaften, denn er erleidet 1927 und 1928 zwei Nervenzusammenbrüche und geht 1928 in den Freitod.

6 Nachlese

Keineswegs als vollständig zu bezeichnen ist diese Nachlese. Weitere interessante Bemerkungen zu unserem Thema findet man z.B. bei LORENZ [7], MEHNER [8] und WERKER [9], wobei in [7] und [8] der Symmetnebegriff in allgemeinerer Form zugrunde gelegt wird.

WERKER *schreibt in [9] auf Seite 267:* „Nach diesem darf angenommen werden, dass der Formulierung des Fugenthemas eine Gleichung vorausgegangen ist. Diese bestimmte fast immer die Tonzahl und oft auch die Rhythmik des Themas, die Modulation und Gliederung des Fugenbauplans, sowie immer die Taktlänge der Fuge, sei es durch die Taktzahl, die Fülle der Formbeziehungen oder die Anzahl der Themeneinsätze."

In den letzten 15 Jahren sind vor allem die Arbeiten von RUDOLF WILLE und GUERINO MAZZOLA bemerkenswert. In [11] gibt RUDOLF WILLE eine unfassende Würdigung der Forschung WOLFGANG GRAESERS zur musiktheoretischen Grundlegung mit Hilfe der neuen Entwicklungen in der Mathematik. Und er fragt hier: *„Was machte zu Beginn des SO. Jahrhunderts die Spannweite zwischen Musik und Mathematik aus, dass die Bewältigung die Lebenskraft eines Menschen übersteigt?"* In Beantwortung dieser Frage umreißt R. WILLE die Geschichte der Musiktheorie, beginnend mit den Pythagoräern {*„Irdische Musik ist eine Nachbildung der himmlischen Musik, deren Harmonie auf Zahlen beruht"*). Er stellt die Veränderung aller Wissenschaften mit dem Beginn der Neuzeit heraus *(„Nicht mehr Gott, sondern der Mensch erhält als das erste Wirkliche Geltung"*. Daraus ergibt sich *„die kaum noch zu ertragende Spezialisierung und Kompetenzbegrenzung in den modernen Wissenschaften")*. Er spricht sich für die Restrukturierung der Mathematik und der Musikwissenschaft aus, das bedeutet: Mathematik wird allgemeines Verständigungsmittel und *„die Musiktheorie nimmt in voller Breite Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsformen in der Musik auf und macht sie allgemein verstehbar"*. Das heißt auch Anwendung mathematischer Methoden in der Musiktheorie. R. WILLE beantwortet diese Fragen in 7 Thesen.

MAZZOLA prägt in seinem Buch *„Geometrie der Töne"* [12] den Begriff der lokalen Komposition und definiert ihn als lokale Struktur, die aus einer endlichen, nichtleeren Menge von Punkten im Modul eines Klang-Aspekts besteht. Unter einem Aspekt versteht er eine ausgewählte geordnete Folge von Klangmerkmalen. Symmetrie ist in seiner Mathematischen Musiktheorie dann eine affine Abbildung eines Moduls in sich selbst. Damit kann er alle bekannten Symmetrien in der Musik mathematisch beschreiben.

Literatur

[l] Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Verl. Springer, Berlin 1937, 3. Auflage, S. 3.

[2] Grimm, J. u. W.: Deutsches Wörterbuch, 10. Band, IV. Abt., Leipzig 1942, Spalte 1393ff.

[3] Massenkeil, G.: Untersuchungen zum Problem der Symmetrie in der Instrumentalmusik Mozarts. Franz Steiner Verlag, Wiesbaden 1962, S. 5ff.

[4] Graeser, W.: Bachs „Kunst der Fuge". Im Bach-Jahrbuch 1924, Leipzig.

[5] Schriftenreihe der TU Wien, Band 16, hier: R. Claus, Symmetrie in der Musik in Anton Preisinger: Symmetrie.

[6] Shubnikov, A.V., V.A. Koptsik: Symmetrie in Science and Art. Plenum Press, New York & London.

[7] Lorenz, A.: Betrachtungen über Beethovens Eroica-Skizzen in: Zeitschrift für Musikwissenschaft VII, 1924/25.

[8] Mehner, K.: Beiträge zum Symmetriebegriff in der Musik. Beiträge zur Musikwissenschaft 13, 1971, S. 11-119.

[9] Werker, W.: Studien über die Symmetrie im Bau der Fugen und die motivische Zusammengehörigkeit der Präludien und Fugen des Wohltemperierten Klaviers von J.S. Bach. Breitkopf und Härtel, Leipzig 1922.

[10] Musik in Geschichte und Gegenwart. Allgemeine Enzyklopädie der Musik, Verlag Bärenreiter, Band 16, S. 519.

[11] Wille, R.: Musiktheorie und Mathematik. In: Musik und Mathematik (Hrsg. Götze, Heinz & Wille, Rudolf), Berlin , Springer Verlag 1985, in: Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan.

[12] Mazzola, G.: Geometrie der Töne, Elemente der Mathematischen Musiktheorie. Birkhäuser-Verlag 1990.

Der Beitrag „Symmetrie in der Musik" ist dem Sammelband „Mathematik - interdisziplinär", entnommen. Wir danken dem Autor, Herrn Prof. Schleinitz in Greifwald, und dem Shaker Verlag für die freundlicherweise erteilte Abdruckgenehmigung. Der erwähnte Sammelband erschien 2000 im Shaker Verlag, Aachen. Das Buch enthält auch weitere (nicht nur für Mathematiker) interessante Beiträge, es kann unter folgender Adresse heruntergeladen werden: http://www.shaker.de/Online-Gesamtkatalog/.

Allgemeine Informationen

(Stand Frühjahr 2003)

APL-Germany e.V. ist ein gemeinnütziger Verein mit Sitz in Düsseldorf. Sein Zweck ist es, die Programmiersprache APL, sowie die Verbreitung des Verständnisses der Mensch-Maschine Kommunikation zu fördern. Für Interessenten, die zum Gedankenaustausch den Kontakt zu anderen APL-Benutzern suchen, sowie für solche, die sich aktiv an der Weiterverbreitung der Sprache APL beteiligen wollen, bietet APL-Germany den adäquaten organisatorischen Rahmen.

Auf Antrag, über den der Vorstand entscheidet, kann jede natürliche oder juristische Person Mitglied werden. Organe des Vereins sind die mindestens einmal jährlich stattfindende Mitgliederversammlung sowie der jeweils auf zwei Jahre gewählte Vorstand.

Vorstand

Vorsitzender

Dieter Lattermann
Rheinstraße 23
69190 Walldorf
Tel. (06227) 63469
eMail: 100332.1461@compuserve.com

Schriftführer

Conrad Hoesle-Kienzlen
CHK IT-Consulting
Augustenstr. 57
70178 Stuttgart
Tel. 0172 722 04 48
Fax 0711 674 38 53
eMail: chk@hoesle-kienzlen.de

2. Vorsitzender

Martin Barghoorn
(Technische Universität Berlin)
Lückhoffstr. 8
14129 Berlin
Tel. (030) 314 24392
Fax: (030) 314 25901
eMail: martin@barghoorn.de
http://stat.cs.tu-berlin.de/~barg/

Schatzmeister

Jürgen Beckmann
Im Freudenheimer Grün 10
68259 Mannheim
eMail: JBecki@compuserve.com

Beitragssätze

Ordentliche Mitglieder:

Natürliche Personen	31,00 Euro	p.a.
Studenten / Schüler	10,00 Euro	p.a.

Außerordentliche Mitglieder:

Juristische / natürliche Personen	511,00 Euro	p.a.

Bankverbindung:

BVB Volksbank eG Bad Vilbel
BLZ 518 613 25, Konto-Nr. 523 2694

Hinweis:

Wir bitten alle Mitglieder, uns *Adressenänderungen* und *neue Bankverbindungen* immer sofort mitzuteilen.

Geben Sie bei *Überweisungen* den *Namen* und/oder die *Mitgliedsnummer* an.

Einzugsermächtigung

Mitglieds-Nr.: _____

Ich erkläre mich hiermit widerruflich damit einverstanden, daß APL Germany e.V.

den jeweils gültigen Jahres-Mitgliedsbeitrag von meinem unten angegebenen Konto abbucht.

Einen eventuell bestehenden Dauerauftrag habe ich bei meiner Bank gelöscht.

Bankbezeichnung: _____

BLZ: _____ Konto-Nr.: _____

Datum: _____ Unterschrift: _____

Anzeige

GUI-Utilities für Dyalog APL/W

Ein Buch von Kai Jäger, erschienen im Selbstverlag (BoD), erhältlich im Buchhandel und bei Internet-Anbietern wie Libri und Amazon mit der ISBN-Nr. 3-8311-1831-0.

Das Buch beschreibt frei verfügbare Software, mit deren Hilfe die ohnehin hohe Produktivität eines APL-Programmierers noch beträchtlich erhöht werden kann. Diese Software reduziert den Aufwand für die Erstellung eines GUIs erheblich, wenn die Aufgabenstellungen aus dem kaufmännischen Bereich stammen.

Das Buch wendet sich an den gestandenen APL-Programmierer, der Anwendungen realisiert. Für den APL-Neuling ist es nicht geeignet. Es ist insbesondere keine Einführung in die GUI-Programmierung mit APL. Es ist nur für Dyalog APL/W nutzbar.

Wer GUIs erstellen muss, der wird in der verfügbaren, außerordentlich mächtigen Software eine große Hilfe finden. Mit Hilfe dieses Buches ist auch die Einarbeitung in die grundlegenden Konzepte kein Problem mehr.

Wer APL als mathematisches Werkzeug für statistische Untersuchungen oder zur Datenanalyse benutzt, wird die hier vorgestellte Software nur dann sinnvoll nutzen können, wenn er zumindest gelegentlich auch GUIs erstellen muss.

Nebenbei lernt man noch frei verfügbare Software kennen, welche die Verwendung von Software-Modulen anderer Autoren in eigenen Applikationen stark vereinfacht. Auch Programmier-Teams werden durch diese Software unterstützt.

Weitere Informationen finden Sie unter:
http://www.kai-jaeger.de

www.kai-jaeger.de